

Björn Kralemann

Komplementarität in wechselwirkungsbasierten Repräsentationssystemen

Zusammenfassung

Thema dieser Arbeit ist die Analyse des Effekts der für einen Informationstransfer notwendigen Wechselwirkung von Repräsentationssystem und Umwelt. Diese Analyse basiert auf einem makroskopischen, deterministischen Modellsystem, das die Kategorisierung von Zuständen eines Objekts über eine faktische Wechselwirkung mit einer Messapparatur simuliert. Die Ergebnisse dieser Simulation werden (1) mit denen eines klassischen, wechselwirkungsfreien Kategorisierungsprozesses und (2) mit einem quantenmechanischen Spin-System verglichen. Dieser Vergleich zeigt zum einen, dass die wechselwirkungsbasierte Klassifikation in sehr guter Übereinstimmung mit den probabilistischen Eigenschaften des Spin-Systems von dem klassischen Verlauf abweicht, und zweitens, dass die erkenntnisoperationalen und die quantenmechanischen Ergebnisse in gleicher Weise von der Reihenfolge der Operationen abhängen. Dies legt zumindest nahe, dass nicht vernachlässigbare Wechselwirkungen im Erkenntnisakt zu komplementären Beziehungen in makroskopischen, deterministischen Repräsentationssystemen führen, die denen der quantenmechanischen Komplementarität entsprechen.

Abstract

Topic of this paper is to study the effect of interactions between representational systems and their environment, which are necessary for every kind of information transfer. This analysis is based on a macroscopic and deterministic model, which simulates the categorization of the states of an object by means of its interaction with some measurement device. The results of this simulation are (1) compared to those of a classical representational system, which does not assume any kind of interaction, and (2) with a quantum-mechanical Spin-System. This comparison shows that the interaction based representational system diverges in accordance with the quantum-mechanical Spin-System from the properties of the classical system, while both, interaction based categorizations and Spin-Operators, depend on the order of their application. This suggests that non-negligible interactions in cognitive acts lead to complementary relations in macroscopic, deterministic representational systems which are of the same kind as those found in quantum mechanics.

Einleitung

Das zentrale Problem der ersten und zweiten Generation¹ der Wissenschaftler, die die Quantenmechanik als eine Theorie des Mikrokosmos entwickelt haben, bestand im Verständnis, in der Interpretation ihrer Theorie, während diese Interpretationsfragen gegenwärtig im wissenschaftlichen Diskurs eine nur noch untergeordnete Rolle spielen. Dieses abnehmende Interesse ist aber keineswegs darin begründet, dass die erkenntnistheoretischen bzw. ontologischen Implikationen der Quantenmechanik zufriedenstellend geklärt wären, sondern eher darin, dass man sich an diese Verständnislücke gewöhnt hat und die quantenmechanischen Anomalien nicht mehr als zu erklärende Phänomene, sondern als schlicht hinzunehmende empirische Fakten auffasst.² Im Gegensatz zu dieser Tendenz, die Quantenmechanik als ein schlichtes, empirisch gewonnenes Abbild einer ‚an sich‘ nicht klassischen, etwas wundersamen Natur zu interpretieren, lassen sich seit Bohrs³ und Heisenbergs⁴ Interpretation der Quantenmechanik über komplementäre Messoperationen immer wieder Ansätze finden, die quantenmechanischen Anomalien, die komplementäre Struktur ihrer Naturbeschreibung, auf die Rolle des Messprozesses im Aufbau einer empirischen Theorie zurückführen: Gemeinsamer Kern dieser Ansätze ist die Hypothese, dass nicht-klassische Anomalien und komplementäre Eigenschaften durch die mit dem Erkenntnisakt verbundenen Prozesse oder Implikationen bedingt sein können. Hierzu zu zählen sind Ansätze der „Computational Complementarity“⁵, die komplementäre Operationen in deterministischen Automaten bei induzierten irreversiblen Zustandsübergängen zum Gegenstand haben, oder Ansätze, die komplementäre Beziehungen in makroskopischen Systemen⁶ untersuchen, die Folge der Partitionierung von Zustandsräumen sind. Die folgenden Ausführungen verstehen sich als ein Beitrag im Geiste einer solchen Orientierung, wobei hier die für jeden Informationstransfer notwendige Wechselwirkung von Objekt und Repräsentationssystem im Fokus der Aufmerksamkeit steht.

Ziel dieses Aufsatzes ist es, ein makroskopisches, deterministisches Modellsystem zu präsentieren, das die Kategorisierung der Zustände eines Objekts über eine faktische Wechselwirkung mit einem Repräsentationssystem simuliert. Die Ergebnisse der Simulation werden (1) mit denen eines entsprechenden klassischen Kategoriensystems, das von der Möglichkeit einer wechselwirkungsfreien Zuordnung der Kategorien zu Zuständen des Objekts ausgeht, sowie (2) mit den Eigenschaften eines quantenmechanischen Spin-Systems verglichen: Es zeigt sich, dass die wechselwirkungsbasierte Klassifikation in guter Übereinstimmung mit den probabilistischen Eigenschaften des Spin-Systems vom klassischen Verlauf abweicht. Dieses Ergebnis legt zumindest nahe, dass nicht vernachlässigbare Wechselwirkungen im Erkenntnisakt zu komplementären Eigenschaften von Repräsentationssystemen führen, die denen quantenmechanischer Systeme analog sind.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Im ersten Abschnitt wird ein klassisches, wechselwirkungsfreies Kategoriensystem dargestellt und hinsichtlich seiner statistischen Eigenschaften untersucht. Im zweiten Abschnitt wird eine Implementierung dieses Kategoriensystems auf der Basis von wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen entwickelt und analysiert. Im dritten Abschnitt werden die statisti-

¹ Vgl. z.B. Held (1996).

² Vgl. Mermin (1990), S. 198-200.

³ Bohr (1927), S. 35.

⁴ Heisenberg (1927), S. 55f.

⁵ Vgl. Moore (1956), Finkelstein / Finkelstein (1983), Calude / Calude / Svozil / Yu (1997) und Svozil (1998).

⁶ Vgl. beim Graben (2004), beim Graben (2009) und beim Graben / Atmanspacher (2006).

schen Eigenschaften eines quantenmechanischen Spin-Systems dargestellt und mit den Ergebnissen der ersten beiden Abschnitte verglichen.

Das klassische Modell des Kategoriensystems

Das klassische Beispielsystem besteht aus einem Punkt P der sich auf einem Kreis befindet, siehe Abbildung 1a. Der ontische Zustand⁷ P_γ dieses Systems wird durch den Winkel γ bestimmt, den der Ortsvektor (rot) mit der horizontalen Achse einschließt.

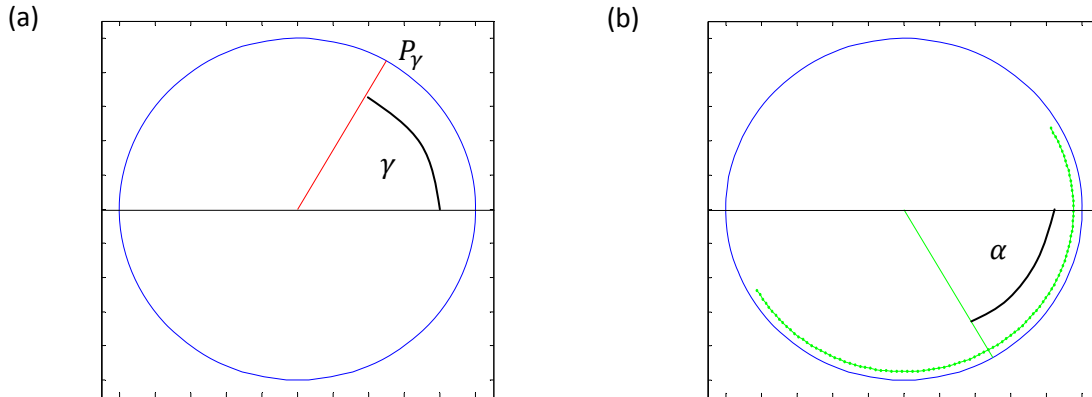


Abbildung 1: (a) Der Punkt auf dem Kreis wird durch den Winkel γ bestimmt. (b) Die Kategorie K_α wird über den Winkel als Menge der Punkte im Bereich $\{\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}\}$ (grüner Halbkreis) bestimmt.

Zur Klassifikation der ontischen Zustände wird eine Kategorie K_α eingeführt, indem auf dem Umfang des Kreises ein Bereich definiert wird – der grüne Halbkreis in Abbildung 1b. Dieser Bereich wird über den Winkel α als die Menge der Punkte im Bereich $\{\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}\}$ bestimmt. Liegt der Punkt P_γ in diesem Bereich, ist er Element der Kategorie K_α , liegt er außerhalb, ist er kein Element von K_α :

$$P_\gamma \in K_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \in \left\{ \alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$P_\gamma \notin K_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \notin \left\{ \alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Über die Kategorie K_α und den ontischen Zustand des Systems P_γ wird die Aussage $K_\alpha(P_\gamma)$ definiert, die wahr ist, wenn $P_\gamma \in K_\alpha$ gilt, und falsch ist, wenn $P_\gamma \notin K_\alpha$ gilt.

$$K_\alpha(P_\gamma) = w \quad \Leftrightarrow \quad P_\gamma \in K_\alpha$$

$$K_\alpha(P_\gamma) = f \quad \Leftrightarrow \quad P_\gamma \notin K_\alpha$$

⁷ Als ontische Zustände werden die Zustände des Systems bezeichnet, die es ‚an sich‘, unabhängig vom hier modellierten Erkenntnisakt besitzt, als epistemische Zustände werden Zustände bezeichnet, die dem System aufgrund der hier modellierten Erkenntnisoperationen zugeschrieben werden, die also das durch Erkenntnisakte gewonnen Wissen über die Umwelt repräsentieren. Zur Anwendung dieser Distinktion in der Interpretation der Quantenmechanik vgl. Atmanspacher / Primas (2003), Scheibe (1964) und Scheibe (1973).

Durch die freie Wahl des Winkels α wird auf diese Weise ein Kategoriensystem K_α bestimmt. Ein epistemischer Zustand des Systems $|\psi\rangle$ repräsentiert – im Gegensatz zu seinem ontischen Zustand – das Wissen, das im Rahmen des Kategoriensystem K_α besteht. Ist die Aussage $K_\alpha(P_\gamma)$ wahr, befindet sich das System im epistemischen Zustand $|K_\alpha\rangle$:

$$K_\alpha(P_\gamma) = w \quad \Rightarrow \quad |\psi\rangle = |\alpha\rangle.$$

Das zentrale Moment dieses klassischen Modells besteht darin, dass die Bestimmung des epistemischen Zustands $|\psi\rangle$ einfach durch eine unmittelbare Kenntnisnahme des ontischen Zustands P_γ möglich ist – also ohne dass irgendeine Operation, eine erkenntnisfundierende Interaktion, notwendig wäre. Es handelt sich hier also um das klassische Bild einer informationstheoretischen Einbahnstraße, in dem Informationen über die Umwelt gewonnen werden können, ohne Informationen über den Erkenntnisprozess oder das jeweilige Repräsentationssystem auf die Umwelt zu übertragen – also ohne ihren Zustand zu verändern.

Um den klassischen Zusammenhang der unterschiedlichen epistemischen Zustände $|\alpha\rangle$ zu bestimmen, werden die auf Grund der Überschneidung ihrer kategorialen Bereiche zwischen ihnen bestehenden bedingten Wahrscheinlichkeiten bestimmt: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit den Zustand $|b\rangle$ festzustellen, wenn bereits der Zustand $|a\rangle$ festgestellt wurde? Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis b unter der Bedingung der Gegebenheit eines Ereignisses a auftritt, entspricht dann der relativen Häufigkeit – also dem Verhältnis der Anzahl von Fällen, die sowohl die Eigenschaft a und b aufweisen, zur Anzahl der Fälle, die nur die Eigenschaft a aufweisen:

$$p(b|a) = \frac{n(b, a)}{n(a)}.$$

Um diese bedingten Wahrscheinlichkeiten für das Modellsystem zu bestimmen, werden acht epistemische Zustände betrachtet. Diese acht epistemischen Zustände sind über den Umfang des Kreises mit einer Differenz von 45° gleichmäßig verteilt, siehe Abbildung 2a. Für diese Zustände könnten einerseits die bedingten Wahrscheinlichkeiten über eine Simulation bestimmt werden, andererseits bietet sich hier ebenfalls die Möglichkeit, diese über die Konstruktion und Überlappung ihrer Klassifikationsbereiche K_α theoretisch abzuleiten. In Abbildung 2b sind die kategorialen Bereiche der zwei epistemischen Zustände $|0^\circ\rangle$ (grün) und $|45^\circ\rangle$ (rot) sowie der Bereich ihrer Überlappung (magenta) dargestellt. Ist eine sehr große Menge von Punkten P_γ gleichmäßig über den Kreis verteilt – ist also die Wahrscheinlichkeitsdichte als Funktion des Winkels konstant, $p(\gamma) = konst.$ –, dann ist der Umfang einer bestimmten Menge von Ereignissen – die Anzahl der Fälle – proportional zur Länge des durch den Ereignistyps bestimmten Kreissegments. Da die Anzahl aller möglichen Fälle dem gesamten Kreisumfang entspricht, entspricht die absolute Wahrscheinlichkeit eines Ereignistyps dem Verhältnis seines Kreissegments zum Umfang des Kreises bzw. des Verhältnisses der entsprechenden Winkelbereiche. So ist der kategoriale Bereich, der dem epistemischen Zustand $|0^\circ\rangle$ zugeordnet wird, in Abbildung 2b durch den grünen Halbkreis gegeben, so dass sich die absolute Wahrscheinlichkeit des Zustands $|0^\circ\rangle$ als Verhältnis des Kreissegments zum gesamten Kreisumfang ergibt: $p(|0^\circ\rangle) = 0.5$.

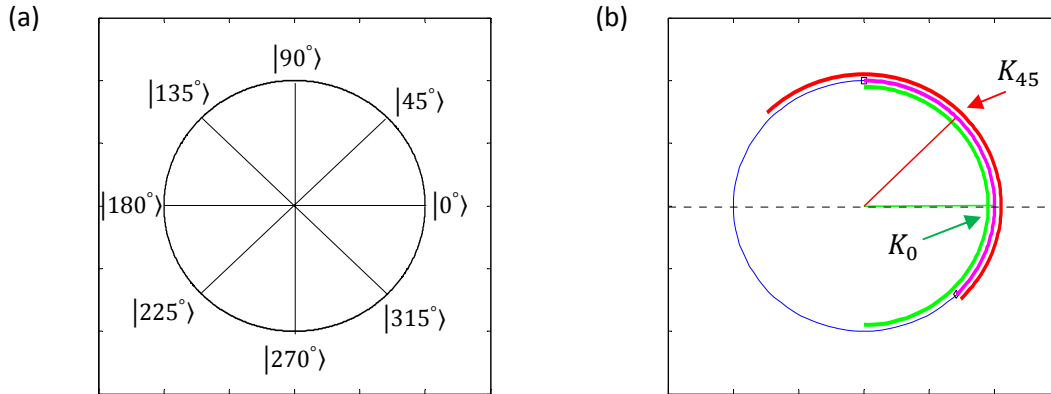


Abbildung 2: (a) Die Verteilung der acht epistemischen Zustände über ihre Messrichtungen. (b) Die kategorialen Bereiche K_0 (grün) und K_{45} (rot) sowie der Bereich ihrer Überschneidung (magenta).

Um die bedingte Wahrscheinlichkeit des Zustands $|45^\circ\rangle$ – roter Halbkreis in Abbildung 2b – unter der Bedingung der Gegebenheit des Zustands $|0^\circ\rangle$ – grüner Halbkreis in Abbildung 2b – zu bestimmen, wird daher die Länge des Kreissegments, das sowohl $|0^\circ\rangle$ als auch $|45^\circ\rangle$ zugeordnet wird – der Bereich der Überlappung in Abbildung 2b (magenta) –, durch die Länge des Kreissegments von $|0^\circ\rangle$ dividiert: $p(|45^\circ\rangle||0^\circ\rangle) = 0.75$. Offensichtlich ist die bedingte Wahrscheinlichkeit epistemischer Zustände hier eine Funktion, die nur von der Winkeldifferenz der Zustände $\Delta\varphi$ abhängt und für identische Zustände mit einer Winkeldifferenz von 0°

$$p(\Delta\varphi = 0^\circ) = 1$$

und für gegenüberliegende Zustände mit einer Winkeldifferenz von 180°

$$p(\Delta\varphi = 180^\circ) = 0$$

ist. Wenn die Winkeldifferenz $\Delta\varphi(\alpha, \gamma)$ als der Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Zentren der den Zuständen $|\alpha\rangle$ und $|\gamma\rangle$ entsprechenden Kategorien K_α und K_γ aufgefasst wird, gilt für dieses Modell allgemein der folgende lineare Zusammenhang der bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle) = 1 - \frac{|\Delta\varphi(\alpha, \gamma)|}{180^\circ}.$$

Dieser Zusammenhang hängt ausschließlich von der Winkeldifferenz der epistemischen Zustände ab und ist in Abbildung 3a dargestellt. Der Erwartungswert⁸

$$E\{K_\alpha\}_\gamma = p(K_\alpha = w||\gamma\rangle) \cdot 1 + p(K_\alpha = f||\gamma\rangle) \cdot (-1),$$

⁸ Der Erwartungswert ist allgemein über den Zusammenhang $E\{X\} = \sum_{v_i} p(x_i) \cdot x_i$ definiert. Um diese mathematische Operation auf das Beispiel anwenden zu können, müssen die beiden möglichen Ergebnisse der klassischen Messung w, f auf Zahlenwerte abgebildet werden: $w \rightarrow 1, f \rightarrow -1$.

Diese Wahl ist grundsätzlich willkürlich. Die hier gewählten Werte sind durch den später vorzunehmenden Vergleich mit dem quantenmechanischen Spin-Modell motiviert. Sie legen nahe, auf dem Kreis gegenüberliegende kategoriale Bereiche zu den Eigenzuständen eines Operators mit diesen Eigenwerten in Beziehung zu setzen.

$$= 2 \cdot p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle) - 1 = 1 - 2 \cdot \frac{|\Delta\alpha(\alpha, \gamma)|}{180^\circ},$$

den Zustand $|\alpha\rangle$ festzustellen, wenn der Zustand $|\gamma\rangle$ bereits festgestellt wurde – also im Zustand $|\gamma\rangle$ –, ist in Abbildung 3b als blaue Funktion dargestellt. Die entsprechende Standardabweichung⁹ ist

$$\sigma\{K_\alpha\}_\gamma = \sqrt{1 - (E\{K_\alpha\}_\gamma)^2} = \sqrt{1 - \left(1 - 2 \cdot \frac{|\Delta\alpha(\alpha, \gamma)|}{180^\circ}\right)^2}$$

und ist in Abbildung 3b als rote Funktion dargestellt. Der Erwartungswert folgt dem Verlauf der Wahrscheinlichkeit und ist genau dann mit dem maximalen bzw. minimalen Messwert identisch, wenn die Messwahrscheinlichkeit $p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle)$ für den maximalen Wert 1 bzw. 0 ist. Entsprechend verschwindet die Streuung von K_α für die entsprechenden Winkeldifferenzen von $\Delta\alpha(\alpha, \gamma) = 0^\circ$ und $\Delta\alpha(\alpha, \gamma) = 180^\circ$ – also wenn die Wahrscheinlichkeit $p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle) = 0$ oder $p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle) = 1$ ist. Die Größe K_α lässt sich demnach im Zustand $|\gamma\rangle$ nur dann streuungsfrei messen, wenn $\alpha = \gamma$ oder $\alpha = \gamma + 180^\circ$ gilt – wenn sich das System ohnehin schon in dem Zustand befindet, der gemessen werden soll, oder in der Negation dieses Zustands. Die beiden klassischen Kategorien K_α und K_γ lassen sich genau dann simultan streuungsfrei messen, wenn ihre kategorialen Bereiche disjunkt oder identisch sind, wenn sie entweder keinen ontischen Zustand gemeinsam erfassen oder dieselben ontischen Zustände erfassen. Streuungsfreie Kategorien lassen sich demnach nur durch Systeme disjunkter kategorialer Bereiche implementieren, während jede Form der Überschneidung der kategorialen Bereiche zu einer Streuung der Ergebnisse führt.

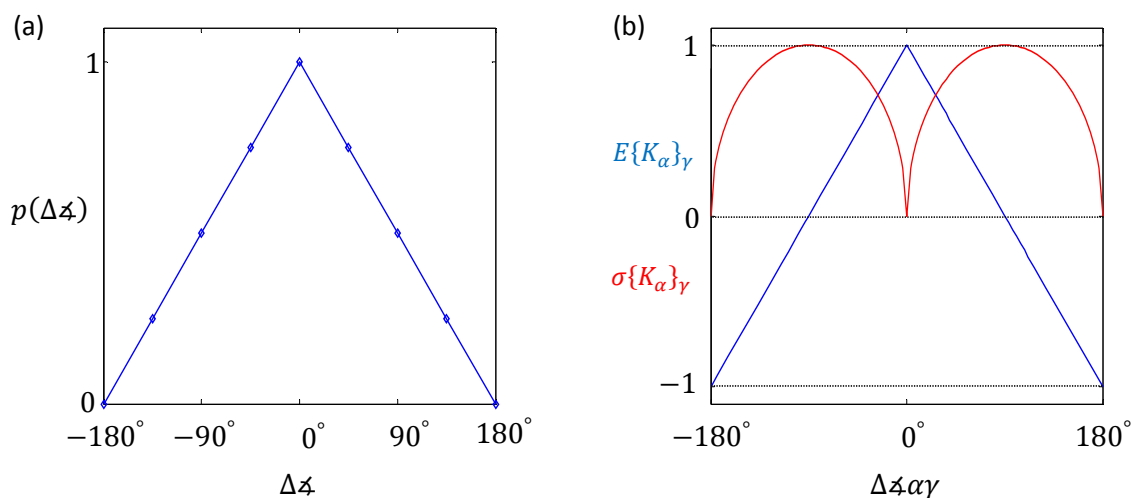


Abbildung 3: (a) Die bedingten Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände als Funktion ihrer Winkeldifferenz $\Delta\alpha$. (b) Erwartungswert $E\{K_\alpha\}_\gamma$ und Standardabweichung $\sigma\{K_\alpha\}_\gamma$ der Kategorie K_α im epistemischen Zustand $|\gamma\rangle$ als Funktion der Winkeldifferenz $\Delta\alpha\gamma$.

⁹ Die Standardabweichung einer Messgröße X beschreibt die durchschnittliche Abweichung – die Streuung – vom Erwartungswert und ist genau dann Null, wenn nur einer der möglichen Messwerte mit Sicherheit gemessen wird:

$$\sigma\{X\} = \sqrt{E\{(X - E\{X\})^2\}} = \sqrt{E\{X^2\} - (E\{X\})^2}.$$

Das erkenntnisoperationale Modell des Kategoriensystems

Dem erkenntnisoperationalen Modell liegt die Annahme zu Grunde, dass jeder Akt einer Repräsentation auf einem Akt der Wechselwirkung mit der Umwelt beruht, der überhaupt erst die für jegliche Form der Informationsübertragung notwendige Kopplung realisiert. Der für dieses Modell zentrale Aspekt der Kopplung besteht in seiner Wechselwirkungsstruktur: Einerseits beeinflusst der Zustand der Umwelt den des Repräsentationssystems – denn andernfalls trügen die repräsentationalen Zustände keinerlei Information über die Umwelt – andererseits beeinflusst aber das Repräsentationssystem den Zustand der Umwelt über die Wechselwirkung, die den Informationstransfer ins Repräsentationssystem erst ermöglicht.

Der ontische Zustand dieses Modells beschreibt – wie im klassischen Modell – wieder einen Punkt, der sich auf einem Kreis befindet, siehe Abbildung 1a, – nur wird in diesem Fall des Weiteren angenommen, dass es sich bei diesem Punkt um ein elektrisch geladenes Teilchen handelt.¹⁰ Diese Annahme hat lediglich die Funktion, dass es über diese Eigenschaft möglich ist, eine faktische Interaktion zwischen dem ontischen Objekt und dem Repräsentationssystem zu modellieren, die als Grundlage einer faktischen Mess- oder Erkenntnisoperation dienen kann¹¹ – jede andere Modellannahme, die eine solche Erkenntnisoperation ermöglicht, wäre aber gleichermaßen zur Modellierung der Konsequenzen der notwendigen faktischen Interaktion im Erkenntnisprozess geeignet.¹² Der ontische Zustand P_γ dieses Systems wird – auch wieder wie im klassischen Modell – durch den Winkel γ bestimmt, den der Ortsvektor (rot) mit der horizontalen Achse einschließt – siehe Abbildung 4a. In diesem Fall basiert aber die Zuweisung eines epistemischen Zustands $|\alpha\rangle$ auf einer faktischen Wechselwirkung zwischen Objekt und Repräsentationssystem, das durch zwei elektrische Ladungen q_a und q_b realisiert wird, die mit dem geladen Teilchen P_γ wechselwirken: Auf Grund der elektrischen Ladung wirken die Kräfte \vec{F}_{pa} und \vec{F}_{pb} entlang der grünen Verbindungslinien zwischen P_γ und den Ladungen q_a und q_b , die es einerseits ermöglichen den ontischen Zustand P_γ zu klassifizieren – ihm ei-

¹⁰ Ein solches Modellsystem wurde in Aerts (1985), Aerts (1986), Aerts (1987), Aerts / Durt / Grib / Bogaert / Zapatrin (1993) entwickelt und diskutiert – allerdings mit dem Schwerpunkt, die Implikationen der Unkenntnis des Zustands des Messgeräts bei der Messung zu studieren. Von dieser Annahme werde ich hier keinen Gebrauch machen, sondern lediglich die Effekte der unhintergehbaren Wechselwirkung im Rahmen der Mess- oder Repräsentationsoperation diskutieren. Es ist allerdings anzunehmen, dass die beiden Ansätze zu ähnlichen Ergebnissen führen – was in der Tat der Fall ist –, weil es für die Messung lediglich auf die relative Lage von Messgerät und Messobjekt ankommt, so dass eine Verschiebung der relativen Lage durch den Einfluss auf das Messobjekt nicht von einer Unsicherheit bezüglich der relativen Lage durch Informationsmangel bezüglich des Zustands des Messgeräts zu unterscheiden ist.

¹¹ In der Tat ist diese Modellierung qualitativ und beansprucht keineswegs ein realistisches physikalisches Modell eines realen Systems – etwa eines Spin-Systems – zu sein. Es wird von vielen Details, wie etwa den Konstanten der elektrostatischen Anziehung der Größe der Ladung oder einer möglichen Anfangs- oder Endgeschwindigkeit des Teilchens abgesehen. Das Modell verfolgt ausschließlich den Zweck, die Implikationen eines faktisch operationalen Repräsentationsprozesses herauszustellen, der transzendental an eine faktische Wechselwirkung und somit Rückwirkung auf den Zustand des zu repräsentierenden Objekts gebunden ist. Das Modell lässt sich als eine Fiktion, als ein Gedankenexperiment auffassen, dessen Aufgabe es ist, eine Denkmöglichkeit aufzuzeigen.

¹² So ist es z.B. möglich diese Zusammenhänge an Hand der Dynamik deterministischer Automaten zu diskutieren, in denen von der Art der spezifisch physikalischen Art der Wechselwirkung völlig abstrahiert wird, indem lediglich angenommen wird, dass jede Erkenntnisoperation auch zu einer Veränderung des Systemzustands führt. Vgl. hierzu z.B. Moore (1956), Finkelstein / Finkelstein (1983), Svozil (1998) oder Calude / Calude / Svozil / Yu (1997).

nen epistemischen Zustand $|\alpha\rangle$ zuzuweisen – andererseits aber gleichermaßen auch auf den ontischen Zustand P_γ selbst wirken.

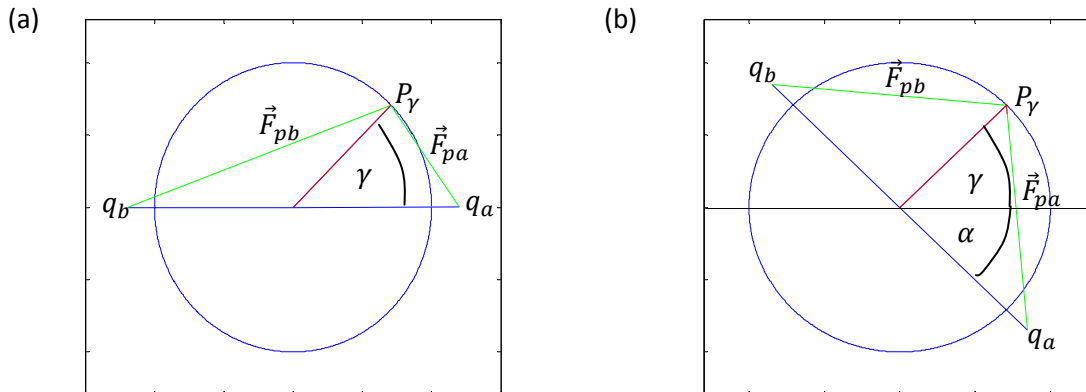


Abbildung 4: (a) Die Position des geladen Teilchens auf dem Kreis wird durch den Winkel γ seines Ortsvektors mit der horizontalen Achse (rot) bestimmt. Die die Bestimmung eines epistemischen Zustands ermöglichende Messoperation basiert auf den sich auf einer Geraden befindlichen Ladungen q_a und q_b : Die zwischen den Ladungen wirkenden Kräfte \vec{F}_{pa} und \vec{F}_{pb} (entlang der grünen Verbindungslinien) ermöglichen einerseits durch ihre Wirkung auf die Ladungen q_a und q_b eine Klassifikation des ontischen Zustands P_γ , wirken aber gleichermaßen auch auf den Zustand P_γ . (b) Die jeweilige Orientierung des Messapparats α führt zu jeweils anderen Kräfteverhältnissen und kann somit zu unterschiedlichen Klassifikationen des gleichen ontischen Zustands führen, so dass jede Orientierung α eine zu unterscheidende, eigenständige Messoperation definiert.

Diese Klassifikation ontischer Zustände wird über die operationale Einführung einer Kategorie geleistet: Um zu verdeutlichen, dass es sich hierbei um eine Erkenntnisoperation handelt, wird die erkenntnisoperationale Kategorie als Operator \hat{K}_α symbolisiert. Durch \hat{K}_α wird auf dem Umfang des Kreises der kategoriale Bereich darüber operational definiert, dass für dessen Punkte P_γ der Betrag der Kraft \vec{F}_{pa} größer ist als der der Kraft \vec{F}_{pb} – also darüber, dass die Punkte dichter an der Ladung q_a liegen als an der Ladung q_b ,¹³ was dem Bereich der Kategorien des klassischen Beispiels entspricht:

$$P_\gamma \in \hat{K}_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{F}_{pa}| > |\vec{F}_{pb}|$$

$$P_\gamma \notin \hat{K}_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{F}_{pa}| \leq |\vec{F}_{pb}|$$

Über die Kategorie \hat{K}_α und den ontischen Zustand des Systems P_γ wird die Aussage $\hat{K}_\alpha(P_\gamma)$ definiert, die wahr ist, wenn $P_\gamma \in \hat{K}_\alpha$ gilt, und falsch ist, wenn $P_\gamma \notin \hat{K}_\alpha$ gilt.

$$\hat{K}_\alpha(P_\gamma) = w \quad \Leftrightarrow \quad P_\gamma \in \hat{K}_\alpha$$

$$\hat{K}_\alpha(P_\gamma) = f \quad \Leftrightarrow \quad P_\gamma \notin \hat{K}_\alpha$$

Je nach Orientierung α der Verbindungslinie der Ladungen q_a und q_b entstehen dabei andere Kräfteverhältnisse, siehe Abbildung 4b, so dass es zu anderen Klassifikationen derselben ontischen Zustände kommen kann: Jede Wahl einer Messrichtung definiert eine eigenständige Erkenntnisoperation und Kategorie \hat{K}_α . Wie im klassischen Beispiel wird durch die freie Wahl des Winkels α ein opera-

¹³ Im Folgenden wird angenommen, dass die beiden Ladungen gleich groß sind, und dass eine solche Messung nicht instantan möglich ist, sondern eine bestimmte Zeitspanne braucht, in der die Ladungen aufeinander wirken.

tionales Kategoriensystem \widehat{K}_α bestimmt. Der epistemische Zustand des Systems $|\psi\rangle$ repräsentiert wieder – im Gegensatz zu seinem ontischen Zustand – das Wissen, das im Rahmen des Kategoriensystem \widehat{K}_α auf der Basis der entsprechenden Erkenntnisoperation besteht. Ist die Aussage $\widehat{K}_\alpha(P_\gamma)$ wahr, befindet sich das System im epistemischen Zustand $|\alpha\rangle$:

$$\widehat{K}_\alpha(P_\gamma) = w \quad \Rightarrow \quad |\psi\rangle = |\alpha\rangle.$$

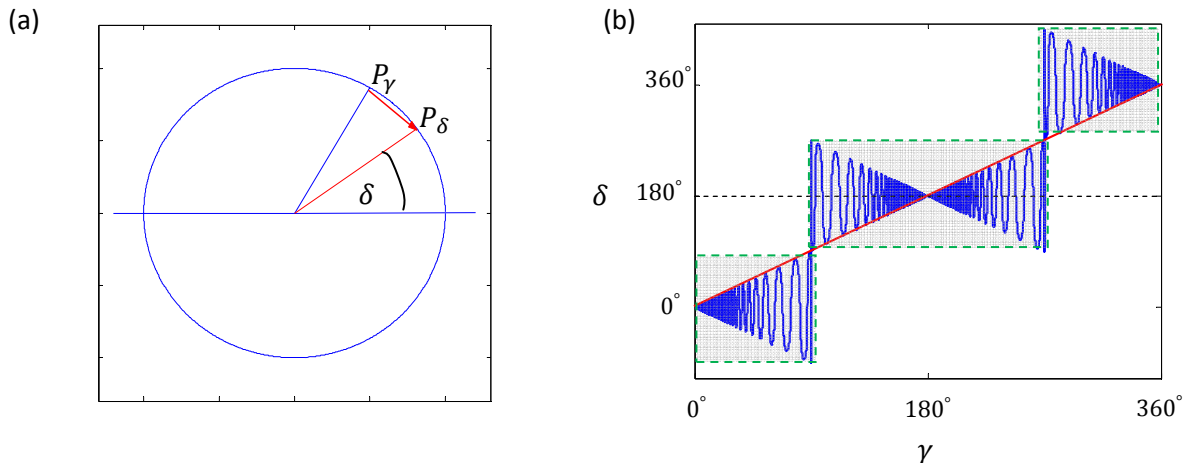


Abbildung 5: (a) Durch die die Erkenntnisoperation ermöglichende elektrostatische Wechselwirkung wird der ontische Zustand P_γ in den ontischen Zustand P_δ transformiert (roter Pfeil). (b) Die blaue Kurve stellt die Abbildung des Zustands vor der Messung P_γ auf den Zustand nach der Messung P_δ für alle Werte des Winkels γ dar. Die rote Linie ist die identische Abbildung, die der Situation entspräche, dass die Erkenntnisoperation den Zustand nicht verändert und somit jeden Zustand auf sich selbst abbildet. In den grau unterlegten Bereichen ist die Abbildung nicht umkehrbar, weil unterschiedliche Zustände dieser Intervalle auf identische Zustände abgebildet werden – der Effekt der Messoperation ist dort irreversibel.

Im Gegensatz zum klassischen Beispiel wirkt aber die Klassifikationsoperation auf den ontischen Zustand des Systems P_γ zurück, so dass es auf Grund der wirkenden Kräfte zu einer Verschiebung des geladenen Teilchens (roter Pfeil) kommt und sich das System nach der Messung im ontischen Zustand P_δ befindet, siehe Abbildung 5a. Nach dem Coulombschen Gesetz ergeben sind die in der Erkenntnisoperation wirkenden Kräfte auf die Teilchen, siehe Abbildung 4a, durch

$$\vec{F}_{pb} = \frac{\overrightarrow{q_b P_\gamma}}{|\overrightarrow{q_b P_\gamma}|^3}, \quad \vec{F}_{pa} = \frac{\overrightarrow{q_a P_\gamma}}{|\overrightarrow{q_a P_\gamma}|^3},$$

gegeben, wobei in der Modellierung alle Konstanten zur Vereinfachung auf 1 gesetzt werden, da sie lediglich die Zeitskala der Modelldynamik nicht aber deren qualitativen Charakter bestimmen. $\overrightarrow{q_b P_\gamma}$ und $\overrightarrow{q_a P_\gamma}$ sind die in Abbildung 4a grün dargestellten Differenzvektoren zwischen den beiden Punktladungen und dem zu messenden Teilchen. Die auf das Teilchen wirkende resultierende Kraft ist dann

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_{pa} + \vec{F}_{pb}.$$

Der Betrag des auf das Teilchen wirkenden Drehmoments ist

$$|\vec{M}_{res}| = |\vec{P} \times \vec{F}_{res}| = |\vec{F}_{res}| \sin(\varphi),$$

wenn die Länge des Ortsvektors – in Abbildung 4a rot dargestellt – als $|\vec{P}| = 1$ angenommen wird, und φ der vom Kraftvektor \vec{F}_{res} und Ortsvektor \vec{P} eingeschlossene Winkel ist: $\varphi = \angle \vec{P}, \vec{F}_{res}$. Wird das Trägheitsmoment – wie alle anderen Konstanten – mit $J = 1$ angenommen, ergibt sich für die Winkelbeschleunigung des Teilchens:

$$\ddot{\gamma} = |\vec{M}_{res}|.$$

Das sowohl die resultierende Kraft $\vec{F}_{res}(\gamma)$ als auch der Ortsvektor $\vec{P}(\gamma)$ des Teilchens bei gegebener Ausrichtung der Messanordnung α – siehe Abbildung 4b – allein vom Zustand des Teilchens abhängen, der durch den Winkel γ bestimmt ist, wird der Effekt der Erkenntnisoperation auf das Teilchen durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung in γ

$$\ddot{\gamma} = |\vec{M}_{res}|(\gamma)$$

beschrieben, die in der Simulation der Erkenntnisoperation numerisch für ein Zeitintervall von 200 Zeiteinheiten¹⁴ gelöst wird, so dass dadurch jeder ontischen Zustand P_γ auf ein durch die Erkenntnisoperation erzeugtes Folgezustand P_δ abgebildet wird, siehe Abbildung 5a.

Abbildung 5b zeigt diese durch die Messoperation in Richtung $\alpha = 0^\circ$ induzierte Transformation der ontischen Zustände: Auf der horizontalen Achse ist der Winkel des geladenen Teilchens vor der Messung γ und auf der senkrechten Achse der Winkel des Teilchens nach der Messung δ dargestellt – die blaue Kurve beschreibt die Abbildung $\gamma \rightarrow \delta$ durch die Messoperation. Von besonderer Bedeutung sind die jeweils grau unterlegten Bereiche. In diesen Bereichen ist die Abbildung nicht umkehrbar, weil unterschiedliche Werte von γ – also vor der Messung – auf identische Werte δ nach der Messung abgebildet werden. Diese werden daher durch jede weitere Folgeoperation identisch klassifiziert und transformiert und sind somit durch keine weitere Messoperation mehr unterscheidbar. Jede solche Messoperation führt aufgrund der notwendigen Messwechselwirkung zu einem unhintergehbaren, irreversiblen Informationsverlust hinsichtlich des ursprünglichen ontischen Zustands des Systems. Die Bedingung der Möglichkeit der Zuweisung eines epistemischen Zustands ist zugleich die Ursache einer unhintergehbaren, irreversiblen Veränderung des ontischen Zustands – die Bedingung eines epistemischen Informationsgewinnes impliziert zugleich einen irreversiblen Informationsverlust bezüglich des ursprünglichen ontischen Zustands des Systems.

Um die Implikationen dieses nicht-klassischen Modells von Erkenntnisoperationen zu analysieren, wird nun eine Versuchsreihe simuliert, in der die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse unterschiedlicher Erkenntnisoperationen bestimmt werden. Analog zum klassischen Beispiel werden dazu acht analoge epistemische Zustände operational definiert, die äquidistant über den Kreisumfang verteilt sind, siehe Abbildung 2a. In jedem Experiment der Simulation wird der ontische Zustand P_γ durch einen Zufallsgenerator mit gleicher Wahrscheinlichkeit für alle Punkte des Kreises ausgewählt. Dann wird durch Zufall einer der acht Erkenntnisoperatoren ausgewählt, durchgeführt und auf den sich aus der Messwechselwirkung ergebenden neuen ontischen Zustand P_δ erneut ein zufällig aus den acht Erkenntnisoperatoren ausgewählter angewendet. Das Ergebnis jeder Messoperation ist, wie im letzten Abschnitt beschrieben, entweder wahr (w) oder falsch (f) – also das Vorliegen oder nicht Vorliegen des jeweils durch die Messoperation semantisch definierten Zustands. Das Ergebnis

¹⁴ Da alle Konstanten auf 1 gesetzt wurden, handelt es sich hier nicht um Sekunden, sondern um eine willkürliche Zeiteinheit.

jedes Experiments ist daher die Kombination von vier Werten: Den beiden zufällig ausgewählten Erkenntnisoperationen in ihrer zeitlichen Reihenfolge und den jeweiligen Ergebnissen der Operation. Ein Beispiel für einen solchen Ergebnisvektor wäre:

$$(|0^\circ\rangle, w, |90^\circ\rangle, f).$$

Hier wäre auf einen zufällig ausgewählten ontischen Zustand *zuerst* die Messoperation \hat{K}_0 mit dem Ergebnis w – also dem Feststellen des Vorliegens des epistemischen Zustands $|0^\circ\rangle$ – angewendet worden, und *anschließend* die Messoperation \hat{K}_{90} mit dem Ergebnis f – also dem Feststellen des Nichtvorliegens des epistemischen Zustands $|90^\circ\rangle$. Das zufällige Auswählen des ontischen Zustands hat die Bedeutung, dass er ‚an sich‘ aus der epistemischen Perspektive bis zu den Messungen völlig unbekannt ist und nach der Messung das Wissen über ihn lediglich darin besteht, dass er so geartet ist, dass die Messoperation \hat{K}_0 ein positives und die anschließende Messung \hat{K}_{90} ein negatives Ergebnis zeitigt.

$p(\beta\rangle \alpha\rangle)$	$ 0^\circ\rangle$	$ 45^\circ\rangle$	$ 90^\circ\rangle$	$ 135^\circ\rangle$	$ 180^\circ\rangle$	$ 225^\circ\rangle$	$ 270^\circ\rangle$	$ 315^\circ\rangle$
$ 0^\circ\rangle$	1	0.84	0.49	0.14	0	0.16	0.48	0.82
$ 45^\circ\rangle$	0.85	1	0.85	0.51	0.16	0	0.17	0.51
$ 90^\circ\rangle$	0.50	0.84	1	0.85	0.51	0.18	0	0.16
$ 135^\circ\rangle$	0.17	0.49	0.83	1	0.84	0.48	0.16	0
$ 180^\circ\rangle$	0	0.16	0.49	0.84	1	0.84	0.48	0.16
$ 225^\circ\rangle$	0.18	0	0.15	0.51	0.85	1	0.84	0.51
$ 270^\circ\rangle$	0.50	0.13	0	0.17	0.49	0.83	1	0.83
$ 315^\circ\rangle$	0.84	0.50	0.15	0	0.17	0.49	0.82	1

Tabelle 1: Die in der Simulation ermittelten bedingten Wahrscheinlichkeiten der acht epistemischen Zustände.

Von diesem Experiment wurden 100.000 Durchläufe numerisch simuliert, aus denen dann die bedingten Wahrscheinlichkeiten des Vorliegens des epistemischen Zustandes $|\beta\rangle$ unter der Bedingung, dass bereits der epistemische Zustand $|\alpha\rangle$ vorher festgestellt wurde, folgendermaßen berechnet werden. Sei

$$n(|\alpha\rangle, w, |\beta\rangle, w)$$

die Anzahl der Versuchsdurchläufe, in denen zuerst das Vorliegen des Zustands $|\alpha\rangle$ und anschließend das Vorliegen des Zustands $|\beta\rangle$ festgestellt wird, und

$$n(|\alpha\rangle, w, |\beta\rangle, f)$$

die Anzahl der Versuchsdurchläufe, in denen zuerst das Vorliegen des Zustands $|\alpha\rangle$ festgestellt wird, anschließend ebenfalls die Messoperation \hat{K}_β durchgeführt wird, aber dann – im Gegensatz zum ersten Fall – festgestellt wird, dass der Zustand $|\beta\rangle$ *nicht* vorliegt. Die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(|\beta\rangle||\alpha\rangle) = \frac{n(|\alpha\rangle, w, |\beta\rangle, w)}{n(|\alpha\rangle, w, |\beta\rangle, w) + n(|\alpha\rangle, w, |\beta\rangle, f)}$$

wird dann als die relative Häufigkeit der Fälle operationalisiert, in denen die Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ nacheinander festgestellt werden, und der Fälle, in denen der Zustand $|\alpha\rangle$ festgestellt und die Messoperation \hat{K}_β überhaupt – also unabhängig vom Ergebnis – durchgeführt wird. Es wird die Wahrscheinlichkeit bestimmt, dass im Zustand $|\alpha\rangle$ die Messung des Zustands $|\beta\rangle$ erfolgreich ist.

Die Ergebnisse der Simulation sind in Tabelle 1 aufgeführt und sind durch folgende Eigenschaften ausgezeichnet:

- (1) Alle Erkenntnisoperationen sind selbstkonsistent, da für die bedingten Wahrscheinlichkeiten auf der Diagonalen $p(|\alpha\rangle||\alpha\rangle) = 1$ gilt: Die unmittelbare Wiederholung derselben Operation führt mit Sicherheit zum gleichen Ergebnis wie die erste Durchführung.
- (2) Im Rahmen kleiner statistischer Schwankungen folgen die bedingten Wahrscheinlichkeiten einem Zusammenhang, der – wie im klassischen Pendant – ausschließlich von der Winkeldifferenz zwischen bedingendem und bedingtem Zustand abhängt: So ist z.B. die bedingte Wahrscheinlichkeit zwischen benachbarten Zuständen – also bei einer Winkeldifferenz von 45° – immer $p(\Delta\varphi = 45^\circ) \approx 0.84$.

Die Abhängigkeit der bedingten Wahrscheinlichkeit von der Winkeldifferenz wurde mit einer feineren Auflösung von 100 Werten im Bereich von $\Delta\varphi = \{0^\circ, \dots, 360^\circ\}$ auf der Basis von jeweils 100.000 gleich verteilten ontischen Zuständen durch eine entsprechende Simulation bestimmt. Dieser Zusammenhang der bedingten Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände in Abhängigkeit ihrer Winkeldifferenz – die rote gestrichelte Linie in Abbildung 6a – weicht offensichtlich von dem des klassischen Modells derselben kategorialen Bereiche ab – die blaue Linie in Abbildung 6a. Die erkenntnisoperationale und die klassische Modellierung des gleichen kategorialen Systems – die den jeweiligen epistemischen Zuständen entsprechenden kategorialen Bereiche sind in beiden Fällen dieselben Halbkreise – führen also demnach zu unterschiedlichen bedingten Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände. Die explizite Berücksichtigung einer grundsätzlich für jeden Informationstransfer notwendigen Wechselwirkung führt zu einer Veränderung der gegenseitigen Abhängigkeitsverhältnisse der unterschiedlichen epistemischen Zustände bei invarianten Klassifikationsbereichen:¹⁵ Im erkenntnisoperationalen Modell sind zwar die kategorialen Bereiche invariant, nicht aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung der ontischen Zustände. Jede Erkenntnisoperation verändert als unhintergebarerer Effekt der Messwechselwirkung den jeweils bestehenden ontischen Zustand und daher auch die jeweils bestehende Wahrscheinlichkeitsverteilung der ontischen Zustände, wie sich in Abbildung 6b sehen lässt: Vor der Operation \hat{K}_0 ist die Wahrscheinlichkeit der ontischen Zustände über den gesamten Kreis bzw. über alle Winkel gleich verteilt (blaues Histogramm), nach der Operation \hat{K}_0 hingegen (rotes Histogramm) ist die Wahrscheinlichkeit in der Umgebung der Schnittpunkte der Messrichtung mit dem Kreis, des Bereichs um die beiden zur Messung verwendeten Ladungen –

¹⁵ Versteht man die Intension von Repräsentanten eines Repräsentationssystems über das gegenseitige Bedingungsverhältnis ihrer Verwendung, dann legt dieses Ergebnis nahe, dass es durch die erkenntnisbedingende Wechselwirkung zu einer Veränderung der Semantik der epistemischen Zustände gegenüber dem klassischen Fall kommt. Vgl. zu einer solchen Konzeption der Semantik Kralemann (2006), S. 429f. und S. 456f.

also in der Umgebung von 0° und in der Umgebung des ‚gegenüberliegenden‘ Winkel 180° – deutlich erhöht, während sie in der dazu senkrechten Richtung deutlich vermindert ist. Im Fall der Erkenntnisoperationen sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten eben nicht Ausdruck einer invarianten, zugrunde liegenden gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung, sondern ergeben sich aus der gegebenen Verteilung der ontischen Zustände sowie der jeweils für die Erkenntnisoperation spezifischen Art diese Verteilung zu verändern. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Erkenntnisoperationen unterscheiden sich von den klassischen dadurch, dass sie zusätzlich noch die je spezifische Art jeder Operation reflektieren, die Verteilung der ontischen Zustände zu verändern.

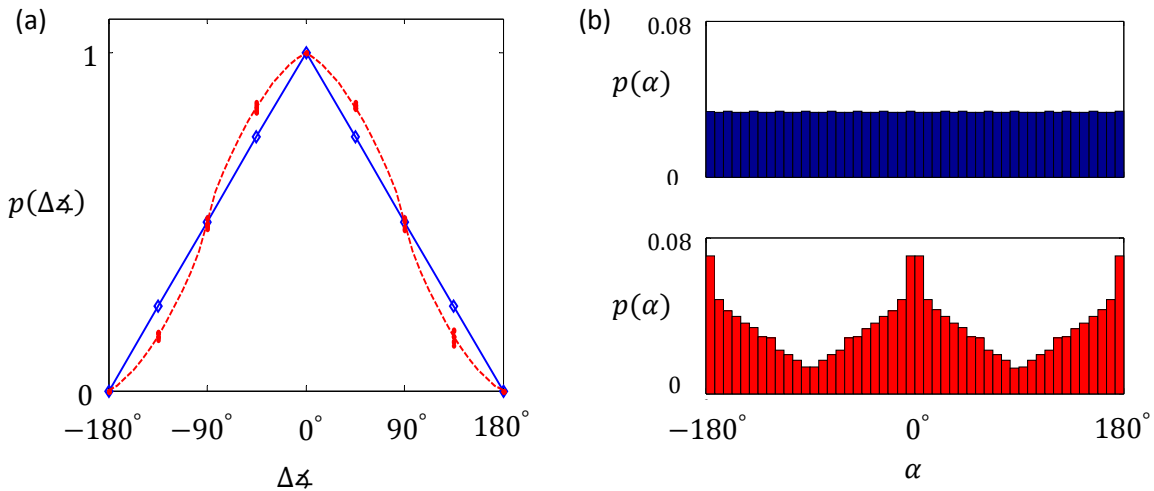


Abbildung 6: (a) Die Abhängigkeit der bedingten Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände von ihrer Winkeldifferenz $\Delta\phi$. Die roten Punkte zeigen die Werte für die acht epistemischen Zustände aus der Tabelle, während die gestrichelte rote Linie den Verlauf der Messungen für dazwischenliegende Werte der Winkeldifferenz darstellt. Die blaue Linie stellt den Verlauf des entsprechenden klassischen Kategoriensystems dar. (b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der ontischen Zustände vor der Erkenntnisoperation \hat{K}_0 (blau, obere Grafik) und nach der Operation (rot, untere Grafik): Durch die Erkenntnisoperation kommt es zu einer Zunahme der Wahrscheinlichkeit zentriert um die Messrichtung und einer entsprechenden Abnahme senkrecht dazu.

Der Gliederung des klassischen Beispiels folgend werden nun Erwartungswert und Standardabweichung der Erkenntnisoperation \hat{K}_α im epistemischen Zustand $|\gamma\rangle$ für das erkenntnisoperationale Modell diskutiert.¹⁶ Da es hier um den Erwartungswert im Zustand $|\gamma\rangle$ des Systems geht, müssen zur Berechnung die entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle)$ für den erkenntnisoperationalen Fall, Abbildung 6a, verwendet werden. Der Erwartungswert einer Messung \hat{K}_α im Zustand $|\gamma\rangle$ ist dann durch

$$E\{\hat{K}_\alpha\}_\gamma = p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle) \cdot 1 + (1 - p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle)) \cdot (-1) = 2 \cdot p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle) - 1$$

gegeben. Die Standardabweichung von \hat{K}_α im epistemischen Zustand ist dann analog zum klassischen Modell:

$$\sigma\{\hat{K}_\alpha\}_\gamma = \sqrt{1 - (E\{\hat{K}_\alpha\}_\gamma)^2}.$$

¹⁶ Um den Erwartungswert berechnen zu können, müssen die beiden möglichen Ergebnisse w, f wieder auf Zahlenwerte abgebildet werden: $w \rightarrow 1, f \rightarrow -1$.

Erwartungswert $E\{\hat{K}_\alpha\}_\gamma$ und Standardabweichung $\sigma\{\hat{K}_\alpha\}_\gamma$ sind in Abbildung 7b dargestellt: Der Erwartungswert folgt wie im klassischen Fall dem Verlauf der Wahrscheinlichkeit und ist genau dann maximal bzw. minimal, wenn die Wahrscheinlichkeit $p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle) = 1$ oder $p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle) = 0$ ist. Entsprechend verschwindet die Streuung von \hat{K}_α für die entsprechenden Winkeldifferenzen von $\Delta\varphi(\alpha, \gamma) = 0^\circ$ und $\Delta\varphi(\alpha, \gamma) = 180^\circ$ – also dann, wenn die Wahrscheinlichkeit $p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle) = 0$ oder $p(|\alpha\rangle||\gamma\rangle) = 1$ ist. Die Größe \hat{K}_α lässt sich im Zustand $|\gamma\rangle$ demnach auch hier nur dann streuungsfrei messen, wenn $\alpha = \gamma$ oder $\alpha = \gamma + 180^\circ$ gilt – wenn sich das System ohnehin schon in dem Zustand befindet, der gemessen werden soll, oder in der Negation dieses Zustands.

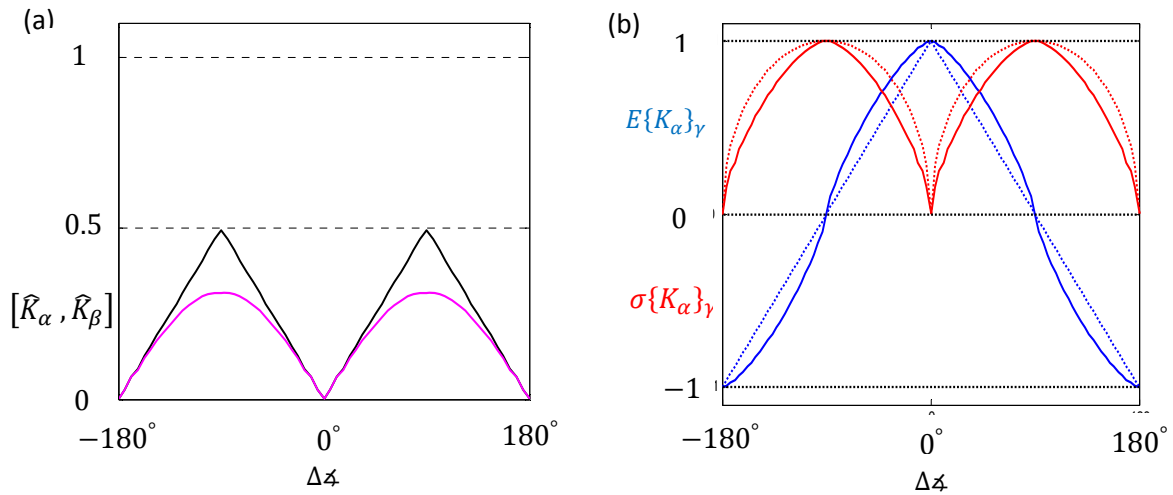


Abbildung 7: (a) Der Effekt der Reihenfolge der Erkenntnisoperationen auf die Ergebnisse als Funktion der Winkeldifferenz: Die schwarze Kurve zeigt die direkt aus den ontischen Zuständen der Simulation bestimmte relative Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{ont}$, dass es zu einer Veränderung des jeweiligen Resultats kommt, während die violette Kurve die indirekt aus den Veränderungen der Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände bestimmten Veränderungswahrscheinlichkeit $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{epis}$ präsentiert. (b) Erwartungswert (blau) und Streuung des erkenntnisoperationalen Modells als Funktion der Winkeldifferenz von Zustand und Operator. Die entsprechenden Verläufe des klassischen Modells sind als gepunktete Funktionen sichtbar.

Nachdem die Abweichung der bedingten Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse vom klassisch zu erwartenden Verlauf sowie Erwartungswert und Streuung diskutiert wurden, soll nun ein weiterer Aspekt quantenmechanischer Komplementarität thematisiert werden: der Effekt der Reihenfolge der Erkenntnisoperationen auf ihre Ergebnisse. Die Relevanz der Reihenfolge der Operationen bzw. ihre Quantifizierung findet in der Quantenmechanik Ausdruck in einem Operator

$$[\hat{A}, \hat{B}]_{quant} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A},$$

der als *Kommutator* bezeichnet wird und der Aussagen über die Vertauschbarkeit unterschiedlicher Operatoren \hat{A} und \hat{B} zulässt. Er ist durch die Differenz der in jeweils unterschiedlicher Reihenfolge angewandten Operatoren \hat{A} und \hat{B} definiert und folglich in Anwendung auf jeden Zustand Null, wenn die Reihenfolge der Anwendung keine Rolle spielt. Der Kommutator drückt demnach aus, in welchem Maße die Ergebnisse unterschiedlicher Erkenntnisoperationen, \hat{A} oder \hat{B} , von der Reihenfolge ihrer Anwendung abhängen, was sich letztlich auf die Frage reduzieren lässt, ob die Resultate einer Operation \hat{A} davon abhängen, ob vorher eine Operation \hat{B} durchgeführt wurde oder nicht: In welchem Maße ändern sich die Ergebnisse einer Erkenntnisoperation \hat{A} im Zustand $|\gamma\rangle - \hat{A}|\gamma\rangle$, wenn vorher die Operation \hat{B} durchgeführt wurde – $\hat{A}\hat{B}|\gamma\rangle$ – und wie hängt diese Veränderung vom Verhältnis

der beiden Operatoren \hat{A} und \hat{B} ab. Der Frage nach dem Effekt der Reihenfolge der Erkenntnisoperationen wird im Folgenden in dieser Form für das System der Erkenntnisoperationen \hat{K}_α nachgegangen, wobei zu bedenken ist, dass für klassische Kategoriensysteme die Ergebnisse offensichtlich nicht von der Reihenfolge ihrer Verwendung abhängen können.

Wenn die Operatoren explizit bekannt sind, lässt sich der Kommutator ebenfalls explizit berechnen, so dass bestimmt werden kann, ob die Operatoren kommutativ sind oder ob eine unterschiedliche Reihenfolge ihrer Anwendung zu unterschiedlichen Resultaten führt. Da die Erkenntnisoperatoren \hat{K}_α des Beispielsystems nicht in expliziter Form – als Operatoren in einem Vektorraum – vorliegen, sondern nur implizit, durch den Effekt der Erkenntnisoperationen auf die ontischen Zustände, bestimmt sind, ist der oben definierte quantenmechanische Kommutator hier nicht anwendbar. Stattdessen wird der Effekt der Reihenfolge der Operatoren auf die ontische Zustände direkt simuliert – d.h. im jeweiligen Einzelfall.

Es tritt desweiteren das Problem auf, dass es für einzelne Zustände $|\gamma\rangle$ immer möglich ist, dass die Reihenfolge der Operatoren in diesem speziellen Fall keine Rolle spielt, obwohl es für andere Zustände der Fall wäre. Dass die Reihenfolge von Operatoren keine Rolle spielt, drückt aber einen von der zufälligen Wahl eines Zustands unabhängigen Sachverhalt aus, der folglich also für alle möglichen Zustände Geltung beansprucht. Man muss also bei dieser Vorgehensweise ausschließen, dass man das Ergebnis $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ auf Grund einer unglücklichen Wahl des jeweiligen Zustands erhält. Um dies auszuschließen, wird die Simulation für unterschiedliche Zustände $|\gamma\rangle$ durchgeführt, um dann über die jeweiligen Ergebnisse zu mitteln. Diese Startzustände werden folgendermaßen präpariert: In jedem Experiment der Simulation werden 200.000 ontische Zustände P_γ mit gleicher Wahrscheinlichkeit für alle Punkte des Kreises ausgewählt, auf die eine Erkenntnisoperation \hat{K}_γ angewendet wird, so dass sich das System danach per definitionem im epistemischen Zustand $|\gamma\rangle$ befindet. Die Menge aller ontischen Zustände P_δ , die sich durch die Operation \hat{K}_γ ergeben und zum Resultat w führen – dies sind jeweils ca. 100.000 –, werden der Definition der epistemischen Zustände folgend als ontische Realisation der epistemischen Zustände $|\gamma\rangle$ aufgefasst. Es werden dabei 64 unterschiedliche äquidistante Werte im Bereich $\gamma = \{0^\circ, \dots, 360^\circ\}$ verwendet, über die die Ergebnisse – wie angesprochen – abschließend gemittelt werden, um die Abhängigkeit von der zufälligen Wahl eines bestimmten epistemischen Zustands zu eliminieren.

Um die Abhängigkeit von der Reihenfolge der Messung zu quantifizieren, werden dann jeweils zwei der acht Messoperatoren in Tabelle 1 – \hat{K}_α und \hat{K}_β – ausgewählt. In Messung (I) wird zuerst \hat{K}_α auf die Zustände $|\gamma\rangle$ angewandt: $\hat{K}_\alpha |\gamma\rangle$. In Messung (II) wird zuerst der Operator \hat{K}_β auf $|\gamma\rangle$ angewandt – $\hat{K}_\beta |\gamma\rangle$ – um dann auf den sich aus dieser Messwechselwirkung ergebenden neuen Zustand $|\delta^{II}\rangle$, der unabhängig vom Ergebnis *alle* sich durch die Messwechselwirkung aus den ontischen Zuständen von $|\gamma\rangle$ ergebenden Zustände umfasst, den Operator \hat{K}_α anzuwenden:¹⁷ $\hat{K}_\alpha \hat{K}_\beta |\gamma\rangle$. Es wird demnach jeweils in Bezug auf *dieselben* ontischen Zustände die Erkenntnisoperation \hat{K}_α *unmittelbar* und *nach*

¹⁷ Zur Definition des Kommutators wird hier also von der nicht-empirischen, erkenntnistheoretisch fiktiv aufgebauten Perspektive Gebrauch gemacht, aus der heraus der ontische Zustand bekannt ist, so dass die Resultate beider möglicher Reihenfolgen zweier Messoperationen auf *denselben* ontischen Zustand miteinander verglichen werden können. Aus der ‚realen‘, rein epistemischen Perspektive ist ein solches Vorgehen nicht möglich, weil dort nur die epistemischen Zustände nicht aber die ontischen Zustände selbst zugänglich sind.

der Anwendung der Operation \hat{K}_β durchgeführt, wobei jeweils das Messergebnis w oder f erhalten und registriert wird. In jedem Versuchsdurchlauf werden also in Bezug auf dieselben ontischen Zustände P_γ und je zwei gewählte Operatoren \hat{K}_α und \hat{K}_β zwei Ergebnisse bestimmt: Bezeichnet man das Ergebnis der ersten Messung als E_α^I und das der zweiten als E_α^{II} , ergeben sich folgende Ergebnisvektoren:

$$(\hat{K}_\alpha, E_\alpha^I)^I,$$

$$(\hat{K}_\alpha \hat{K}_\beta, E_\alpha^{II})^{II}.$$

Es lässt sich dann für jedes Experiment der Ausdruck

$$\Delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow E_\alpha^I = E_\alpha^{II} \\ 1 & \Leftrightarrow E_\alpha^I \neq E_\alpha^{II} \end{cases}$$

definieren, der ein Maß der Verschiedenheit der Messergebnisse auf Grund einer weiteren, vorher ausgeführten Erkenntnisoperation für jedes der Experimente ausdrückt: $\Delta_{\alpha,\beta}$ ist genau dann 0, wenn das Ergebnis nicht von der Reihenfolge der Operatoren abhängt, und ist 1, wenn das Ergebnis durch das vorherige Ausführen von \hat{K}_β verändert wird.

$[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{ont}$	\hat{K}_0	\hat{K}_{45}	\hat{K}_{90}	\hat{K}_{135}	\hat{K}_{180}	\hat{K}_{225}	\hat{K}_{270}	\hat{K}_{315}
\hat{K}_0	0	0.25	0.50	0.25	0	0.25	0.50	0.25
\hat{K}_{45}	0.25	0	0.25	0.50	0.25	0	0.5	0.25
\hat{K}_{90}	0.50	0.25	0	0.25	0.5	0.25	0	0.25
\hat{K}_{135}	0.25	0.50	0.25	0	0.25	0.50	0.25	0
\hat{K}_{180}	0	0.25	0.50	0.25	0	0.25	0.50	0.25
\hat{K}_{225}	0.25	0	0.25	0.50	0.25	0	0.25	0.50
\hat{K}_{270}	0.50	0.25	0	0.25	0.50	0.25	0	0.25
\hat{K}_{315}	0.25	0.50	0.25	0	0.25	0.50	0.25	0

Tabelle 2: Die in der Simulation ermittelten Kommutatoren $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{ont}$ der acht Messoperatoren.

Wird mit $n(\alpha, \beta)$ die Anzahl der im jeweils zu Grunde liegenden epistemischen Zustand $|\gamma\rangle$ gegebenen ontischen Zustände, auf den die Operatoren \hat{K}_α und \hat{K}_β angewendet werden, bezeichnet, dann lässt sich für das erkenntnisoperationale Modell ein Äquivalent des Kommutator¹⁸ als

$$[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{ont} = \left\langle \frac{\sum_{i=1, \dots, n(\alpha, \beta)} \Delta_{\alpha\beta}(i)}{n(\alpha, \beta)} \right\rangle_\gamma$$

definieren, wobei die Klammer die eingangs diskutierte Mittelung über alle 64 epistemischen Zustände $|\gamma\rangle$ symbolisiert. Für den Fall, dass die Messergebnisse in *keinem* Fall von der Reihenfolge der Messung abhängen, ergibt sich dann der minimale Wert von $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{ont} = 0$ und für den Fall, dass die Ergebnisse durch die Vertauschung der Reihenfolge in *jedem* Fall verändert werden, ergibt sich der maximale Wert von $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{ont} = 1$. $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{ont}$ lässt sich demnach als die Wahrscheinlichkeit interpretieren, dass es aufgrund des vorherigen Ausführens der Operation \hat{K}_β – aufgrund der Änderung der Reihenfolge der Operationen – zu einer Veränderung des Ergebnisses kommt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Erkenntnisoperation ermöglichende Wechselwirkung den ontischen Zustand so verändert, dass er anders klassifiziert wird, als er ohne die vorhergehende Operation klassifiziert worden wäre.

Die Ergebnisse der Simulation sind in Tabelle 2 aufgeführt und zeigen folgende Charakteristika:

- (1) Die Kommutatoren besitzen die aufgrund der Definition zu erwartende Symmetrie: $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{ont} = [\hat{K}_\beta, \hat{K}_\alpha]_{mod}^{ont}$.
- (2) Jeder Erkenntnisoperator \hat{K}_α lässt sich mit sich selbst vertauschen, ohne die Resultate zu verändern: $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\alpha]_{mod}^{ont} = 0$. Dies ist die Folge der bereits in der Diskussion der bedingten Wahrscheinlichkeiten festgestellten Selbstkonsistenz der Repräsentationsoperationen: Jede Erkenntnisoperation reproduziert bei wiederholter Anwendung ihr Ergebnis.
- (3) Jeder Operator lässt sich mit dem um eine Winkeldifferenz von $\Delta\alpha = 180^\circ$ verschobenen Operator vertauschen: $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_{\alpha\pm 180^\circ}]_{mod}^{ont} = 0$. Für Erkenntnisoperationen, die epistemische Zustände in entgegengesetzten Richtungen feststellen, spielt demnach die Reihenfolge ihrer Messung keine Rolle. Dieser Sachverhalt korrespondiert damit, dass diese Operatoren dieselbe Konstellation der Messvorrichtung – dieselbe Anordnung der Messladungen q_a und q_b – verwenden und sich lediglich im Kriterium der Interpretation einer identischen Messwechselwirkungen unterscheiden, so dass das Vorliegen der ihnen entsprechenden epistemischen Zustände im selben Kontext entscheidbar ist, ohne zwischen nicht simultan realisierbaren Anordnungen wählen zu müssen. Aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten dieser Zustände $p(|\alpha\rangle || \alpha + 180^\circ) = 0$ folgte damit, dass es sich hier um sich gegenseitig ausschließende, simultan feststellbare und somit simultan semantisch definite Zustandsalternativen handelt, die in diesem Fall einer klassischen Negation entsprechen. Da sie gleichermaßen dieselbe Menge ontischer Zustände definieren, haben sie auch dieselbe Menge von Eigenzuständen: Es sind kompatible Operationen.
- (4) Die Kommutatoren $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{ont} = F(\Delta\alpha(\alpha, \beta))$ sind eine Funktion der Winkeldifferenz der Operatoren. Diese Funktion, die die Wahrscheinlichkeit, dass es aufgrund einer Vertauschung zu einer Veränderung der Resultate kommt, in Abhängigkeit von der Winkeldifferenz beschreibt, wurde durch

¹⁸ Diese Definition weicht von der formalen Definition des quantenmechanischen Kommutators ab, der selbst ein Operator ist, während hier bereits ein Erwartungswert gebildet wird. Nichtsdestotrotz quantifiziert diese Größe denselben Sachverhalt, nämlich die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Reihenfolge der Messung.

eine entsprechende Simulation mit einer höheren Auflösung der Winkeldifferenz ermittelt und ist in Abbildung 7a als schwarze Funktion dargestellt.

Dieser Ansatz den Effekt der Reihenfolge von Erkenntnisoperationen zu erfassen ist von der ontischen Beschreibungsebene ausgegangen – d.h. er legt das Wissen um die ontischen Zustände und ihre Dynamik aufgrund der Messwechselwirkung zugrunde, um in jedem Einzelfall festzustellen, ob ein ontischer Zustand wegen einer vorherigen Erkenntnisoperation anders klassifiziert wird, als er ohne deren Effekt klassifiziert worden wäre. Die zur Analyse dieses kontrafaktischen Zusammenhangs verwendeten Informationen sind aber nur in der hier verwendeten Simulation verfügbar – in realen Situationen empirischer Forschung, in denen die Resultate der Erkenntnisoperationen die einzig verfügbare Informationsquelle sind, sind die ontischen Zustände und ihre Dynamik unter diesen Operationen nicht zugänglich, sondern nur ihre sich in den faktisch erzielten Resultaten manifestierenden Effekte. Im Folgenden wird nun eine zweite Abschätzung der Wahrscheinlichkeit der Veränderung der Ergebnisse durch eine Vertauschung der Reihenfolge der Operationen entwickelt, die nur Informationen verwendet, die auf der epistemischen Ebene zugänglich sind – also allein auf den Resultaten faktisch durchgeführter Erkenntnisoperationen beruhen.

Wenn die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses einer Erkenntnisoperation \hat{K}_α nach der vorherigen Anwendung einer weiteren Operation \hat{K}_β nicht diejenige ist, die sich ohne die Operation \hat{K}_β ergibt, können die Operationen nicht in jedem Fall zum gleichen Resultat geführt haben, auch wenn dies im Einzelfall allein durch die Resultate nicht direkt nachweisbar ist, weil nach dem faktischen Ausführen der Operation \hat{K}_β nicht mehr festgestellt werden kann, welches Resultat sich in diesem Fall ergeben hätte, wenn man \hat{K}_β nicht ausgeführt hätte. Es geht hier also darum, indirekt über die Veränderung der Wahrscheinlichkeiten von Resultaten Rückschlüsse auf die Wahrscheinlichkeiten der Veränderung von Ergebnissen aufgrund der geänderten Reihenfolge der Operationen zu ziehen.

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis α durch die Erkenntnisoperation \hat{K}_α im Zustand $|\gamma\rangle$ gemessen wird als $p(\alpha)_\gamma$, und die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Resultat erzielt wird, nachdem die Operation \hat{K}_β ausgeführt wurde, als $p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung in den beiden Fällen zu unterschiedlichen Resultaten führt, *mindestens*

$$\Delta p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma = |p(\alpha)_\gamma - p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma|,$$

weil nur so die Veränderung der Messwahrscheinlichkeiten erklärbar ist. Es kann nur zu einer Veränderung der Messwahrscheinlichkeiten kommen, wenn es Fälle gibt, in denen die Ergebnisse mit und ohne vorheriges Ausführen von \hat{K}_β voneinander abweichen. Der Ausdruck ‚mindestens‘ ist dadurch bedingt, dass es Veränderungen der Resultate geben kann, die sich nicht in einer Veränderung der Messwahrscheinlichkeiten niederschlagen, und zwar dann, wenn Paare sich gegenseitig kompensierender Änderungen auftreten. Der Zusammenhang $\Delta p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma$ erfasst demnach die Veränderungswahrscheinlichkeit exakt, wenn keine kompensierenden Paare von Veränderungen auftreten, und definiert ansonsten eine untere Schranke der Veränderungswahrscheinlichkeit. Der Effekt der Vertauschung der Operatoren – hier der Unterschied zwischen den Messanordnungen $\hat{K}_\alpha|\gamma\rangle$ und $\hat{K}_\alpha\hat{K}_\beta|\gamma\rangle$ – lässt sich dann durch die Wahrscheinlichkeit der Veränderungen von Resultaten abschätzen, die notwendig sind, um die Veränderung der Messwahrscheinlichkeiten zu erklären.

Um diesen Effekt unabhängig von der zufälligen Wahl eines spezifischen Zustand beschreiben zu können – um also allein eine Aussage über das Verhältnis der Operatoren treffen zu können –, wird wie im ersten Fall der über alle 64 epistemischen Zustände $|\gamma\rangle$ gemittelte Ausdruck

$$[\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\beta]_{mod}^{epis} = \langle \Delta p(\alpha|\widehat{K}_\beta)_\gamma \rangle_\gamma = \langle |p(\alpha)_\gamma - p(\alpha|\widehat{K}_\beta)_\gamma| \rangle_\gamma$$

verwendet. Die dieser Abschätzung zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeiten werden unmittelbar in der Simulation durch das sequentielle Ausführen der beiden Operationen bestimmt: Für jede Wahl des Zustands wird die Wahrscheinlichkeit, dass im Zustand $|\gamma\rangle$ das Ergebnis α gemessen wird – $p(\alpha)_\gamma$ – experimentell durch die Anwendung der Operation \widehat{K}_α auf den Zustand $|\gamma\rangle$ bestimmt, wobei der Zustand $|\gamma\rangle$ wie eingangs diskutiert durch die Anwendung der Operation \widehat{K}_γ auf eine Gleichverteilung aller ontischen Zustände unter Ausschluss aller Zustände mit dem Ergebnis f präpariert wird. Die Wahrscheinlichkeit $p(\alpha|\widehat{K}_\beta)_\gamma$, dass die Eigenschaft α nach der Operation \widehat{K}_β gemessen wird, wird analog bestimmt, nur dass vor der Messung von α die Operation \widehat{K}_β auf den Zustand $|\gamma\rangle$ angewendet wird.

Die beiden Ergebnisse der Simulation – die direkte Berechnung der Wahrscheinlichkeit $[\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\beta]_{mod}^{ont}$ aus den ontischen Zuständen (schwarz) und ihre indirekte Berechnung $[\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\beta]_{mod}^{epis}$ aus der Veränderung der Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände (violett) – sind in Abbildung 7a dargestellt: Im Bereich $[\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\beta] < 0.15$ sind die beiden Funktionen identisch – d.h. die relative Häufigkeit des tatsächlichen Auftretens von Veränderungen der Ergebnisse durch die Vertauschung der Reihenfolge der Operationen $[\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\beta]_{mod}^{ont}$ entspricht der Wahrscheinlichkeit $[\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\beta]_{mod}^{epis}$, die durch die Veränderung der Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände impliziert wird. Im Bereich $[\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\beta] > 0.15$ ist $[\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\beta]_{mod}^{ont}$ deutlich größer als $[\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\beta]_{mod}^{epis}$: Es kommt weit häufiger zu tatsächlichen Veränderungen der Ergebnisse, als es für die Veränderung der Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände notwendig wäre. Dieser Überschuss besteht in Paaren von Veränderungen, die sich in ihrem Effekt auf die Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände kompensieren. Im Bereich $[\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\beta] < 0.15$ kommt es demnach durch die Vertauschung der Reihenfolge nur zu Veränderungen in eine Richtung – z.B. ausschließlich zu Übergängen $\alpha = 1 \rightarrow a = -1$ – während es im Bereich stärkerer Effekte der Vertauschung zu Übergängen in beiden möglichen Richtungen kommen kann – z.B. sowohl $\alpha = 1 \rightarrow a = -1$ als auch $\alpha = -1 \rightarrow a = 1$, die sich offensichtlich kompensieren und somit als faktisch auftretende Veränderungen die Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände nicht verändern.

Offensichtlich weisen die Erkenntnisoperationen \widehat{K}_α somit Eigenschaften komplementärer Operationen der Quantenmechanik auf: Die bedingten Wahrscheinlichkeiten der durch sie definierten epistemischen Zustände weichen vom klassisch zu erwartenden Verlauf ab, die Reihenfolge ihrer Anwendung ist nicht irrelevant und sie sind relativ zueinander nicht streuungsfrei messbar. Im nächsten Abschnitt wird es darum gehen, diese qualitativen Parallelen zu quantenmechanischen Operatoren in einem Vergleich mit Spin-Operatoren auch quantitativ zu präzisieren.

Reproduktion der Ergebnisse durch Spin-Operatoren

Im Folgenden soll demonstriert werden, dass die im letzten Abschnitt dargestellten probabilistischen Eigenschaften des erkenntnisoperationalen Modells in sehr guter Näherung denen von quantenmechanischen Spin-Systemen entsprechen.¹⁹ Dazu soll zuerst der mathematische Formalismus der Spin-Systeme knapp dargestellt werden, um deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu bestimmen, die dann mit denen des erkenntnisoperationalen Modells verglichen werden. Der im Folgenden verwendete Formalismus entspricht einem zweidimensionalen quantenmechanischen Spin-System, so dass die epistemischen Zustände als Vektoren in einem zweidimensionalen Vektorraum modelliert werden.²⁰ Die Repräsentationsoperationen \hat{K}_α werden als Operatoren in Form von Matrizen

$$\hat{K}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

definiert, die auf Zustände in Form von Vektoren wirken. Da die epistemischen Zustände, die durch die Operatoren zugewiesen werden, Eigenzustände dieser Operatoren sein müssen, sind die zu den Messoperationen \hat{K}_α zugehörigen epistemischen Zustände $|\alpha\rangle$ die Eigenzustände dieser Operatoren:

$$|\alpha\rangle = \hat{K}_\alpha |\alpha\rangle.$$

Fasst man

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

als Vektoren im zweidimensionalen Zustandsraum auf, dann ist $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bestimmt, was dann zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= \cos(\alpha) \cdot x + \sin(\alpha) \cdot y \\ y &= \sin(\alpha) \cdot x - \cos(\alpha) \cdot y \end{aligned}$$

führt. Mit der Normierungsbedingung $x^2 + y^2 = 1$ ist die Lösung des Gleichungssystems

¹⁹ Es sei hier betont, dass damit keineswegs nahegelegt werden soll, dass das erkenntnisoperationale Modell die tatsächlich den Spin-Messungen zugrunde liegenden Mechanismen reproduziert. Dieses Modell ist lediglich als eine numerisch simulierte Fiktion anzusehen, die nachweisen soll, dass es – weil numerisch simulierbar – denkmöglich ist, im Sinne der Quantenmechanik komplementäre probabilistische Beziehungen von Kategorien eines Repräsentationssystems in deterministischer Weise *allein* auf die mit diesen Operationen verbundene Wechselwirkung zurückzuführen. Wie eingangs erwähnt, ist ein solcher Ansatz nicht neu, sondern so alt wie die Quantenmechanik selbst – neu ist hier, die nahezu perfekte *quantitative* Überstimmung dieser probabilistischen Eigenschaften eines numerischen simulierbaren, makroskopisch realisierbaren Modells mit einem typischen quantenmechanischen System.

²⁰ Hierbei handelt es sich um einen komplexwertigen Vektorraum. Die Operatoren wurden hier aber aus didaktischen Gründen so gewählt, dass die komplexen Zahlen umgangen werden: Dies ermöglicht das Nachvollziehen der mathematischen Zusammenhänge ohne Kenntnis der komplexen Zahlen und eine anschauliche Darstellung der Zustände in einer zweidimensionalen Ebene.

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Die epistemischen Eigenzustände $|0^\circ\rangle$, $|90^\circ\rangle$, $|180^\circ\rangle$ und $|270^\circ\rangle$ sind in Abbildung 8a dargestellt. Die Paare von Zustandsvektoren, die um eine Winkeldifferenz von 180° verschoben sind – das rote und grüne Paar in Abbildung 8a – sind Eigenzustände kompatibler Operatoren, weil sie sich gegenseitig ausschließen, was sich über das Skalarprodukt der Vektoren in ihrer Orthogonalität ausdrückt. Alle anderen Paare von Operatoren sind hingegen komplementär, was sich in der Nicht-Orthogonalität ihrer Eigenzustände ausdrückt.

Für zwei beliebige Zustände $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ ist ein Skalarprodukt

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

als Projektion des Vektors $|\beta\rangle$ auf den Vektor $|\alpha\rangle$ definiert, das für normierte Vektoren dem Cosinus der Winkeldifferenz $\Delta\alpha = \alpha - \beta$ zwischen den Vektoren entspricht. Dem quantenmechanischen Formalismus folgend entspricht die bedingte Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|\beta\rangle$ den Wert α zu messen – also den Zustand $|\alpha\rangle$ festzustellen – dem Betragsquadrat der Projektion des Vektors $|\beta\rangle$ auf den Vektor $|\alpha\rangle$:

$$p(|\alpha\rangle||\beta\rangle) = |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten sind auch hier – wie im Fall des erkenntnisoperationalen Modells – allein eine Funktion der Winkeldifferenz und in Abbildung 8b als grüne Funktion dargestellt: Sie entspricht in sehr guter Näherung dem Ergebnis, das aus dem erkenntnisoperationalen Modell gewonnen wurde – der rot gestrichelten Funktionen –, während beide in ihrer Übereinstimmung deutlich vom klassischen Verlauf – der blau gepunktete Funktion – abweichen.

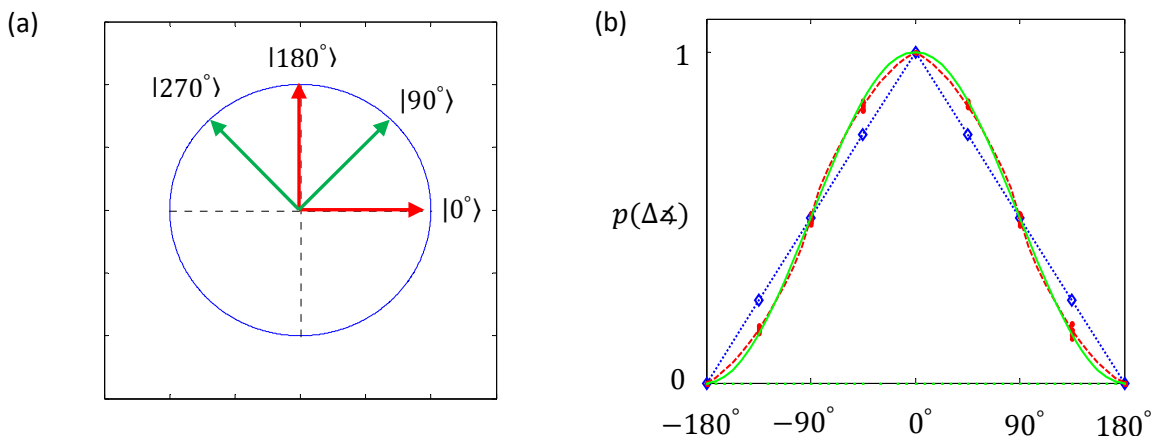


Abbildung 8: (a) Die Eigenzustände der Spin-Operatoren als Elemente des zweidimensionalen Vektorraums: Die roten bzw. grünen Vektoren bilden jeweils Paare orthogonaler Zustände. (b) Die bedingten Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände als Funktion ihrer Winkeldifferenz: die grüne Funktion zeigt den formal quantenmechanisch berechneten Verlauf für das Spin-System, der dem Verlauf des erkenntnisoperationalen Modells – rote gestrichelte Funktion – in sehr guter Näherung entspricht – der von beiden abweichende klassische Verlauf ist als blau gepunktete Funktion dargestellt.

Der quantenmechanische Erwartungswert des Operators \hat{K}_α im Zustand $|\gamma\rangle$ ist durch den Zusammenhang

$$E\{\hat{K}_\alpha\}_\gamma = \langle \gamma | \hat{K}_\alpha | \gamma \rangle = \cos^2\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right)$$

gegeben, wenn wie im repräsentationsoperationalen Modell die möglichen Ergebnisse $\{1, -1\}$ sind. Die Streuung in Form der Standardabweichung

$$\sigma\{X\} = \sqrt{E\{X^2\} - (E\{X\})^2}$$

von \hat{K}_α im Zustand $|\gamma\rangle$ ist dann mit $E\{X^2\} = E\{1^2\} = 1$

$$\sigma\{\hat{K}_\alpha\}_\gamma = \sqrt{1 - (E\{\hat{K}_\alpha\}_\gamma)^2}.$$

Diese Funktionen sind in Abbildung 9b dargestellt: Die blau durchgezogene Funktion zeigt den aus dem quantenmechanischen Spin-System berechneten Erwartungswert als Funktion der Winkeldifferenz, die – wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung – wieder in guter Näherung dem Erwartungswert des erkenntnisoperationalen Modells – der blauen gestrichelten Funktion – entspricht. Beide weichen vom linearen Verlauf des klassischen Modells – der blauen gepunkteten Funktion – ab. Entsprechendes gilt für die Streuungen, die als rote Funktionen dargestellt sind.

Der Effekt der Reihenfolge der Messung auf das Ergebnis wird quantenmechanisch durch den Kommutator

$$\begin{aligned} [\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta] &= \hat{K}_\alpha \hat{K}_\beta - \hat{K}_\beta \hat{K}_\alpha \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) & -\cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\beta - \alpha) & -\sin(\beta - \alpha) \\ \sin(\beta - \alpha) & -\cos(\beta - \alpha) \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ausgedrückt. Wenn die Operatoren $\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta$ kompatibel sind – also dieselbe Menge von Eigenzuständen besitzen – ist der Kommutator Null: Die Reihenfolge der Anwendung der Operatoren spielt in diesem Fall keine Rolle. Sind die Operatoren hingegen nicht kompatibel, hängt die Größe des Kommutators mit der Stärke der Abhängigkeit der Resultate von der Reihenfolge der Messung – also mit dem Grad der Komplementarität – zusammen. Als erste quantitative Abschätzung der Stärke des Effekts der Vertauschung der Operationen sei daher die Größe

$$[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{quant}^{kom} = |\sin(\alpha - \beta)|$$

gewählt.

Alternativ lässt sich auch hier – wie im Fall des repräsentationsoperationalen Modells – der Effekt der Vertauschung der Operatoren über die Veränderung der Wahrscheinlichkeiten der Resultate abschätzen: Wenn die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses einer Messoperation \hat{K}_α nach der Anwendung einer anderen Operation \hat{K}_β nicht diejenige ist, die sich ohne die Operation \hat{K}_β ergäbe, können nicht alle Messungen in beiden Fällen zum gleichen Resultat führen. Bezeichnet man die Wahrschein-

lichkeit, dass das Ergebnis α durch die Messoperation \hat{K}_α im Zustand $|\gamma\rangle$ gemessen wird, wieder als $p(\alpha)_\gamma$ und die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Resultat erzielt wird, nachdem die Operation \hat{K}_β ausgeführt wurde, als $p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung in beiden Fällen zu unterschiedlichen Resultaten führt, mindestens

$$\Delta p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma = |p(\alpha)_\gamma - p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma|.$$

Der Effekt der Vertauschung der Operatoren – also der Unterschied zwischen den Messanordnungen $\hat{K}_\alpha|\gamma\rangle$ und $\hat{K}_\alpha\hat{K}_\beta|\gamma\rangle$ – lässt sich dann wieder durch die Wahrscheinlichkeit des Auftretens derjenigen Veränderungen von Resultaten abschätzen, die notwendig sind, um die Veränderung der Messwahrscheinlichkeiten zu erklären. Diese Größen werden wieder über 64 im Bereich von $\gamma = \{0, \dots, 2\pi\}$ gleich verteilte Zustände

$$|\gamma\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix}$$

gemittelt, um von der zufälligen Wahl des Zustands $|\gamma\rangle$ unabhängig zu sein, was den Zusammenhang

$$[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{quant}^{min} = \langle \Delta p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma \rangle_\gamma = \langle |p(\alpha)_\gamma - p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma| \rangle_\gamma$$

ergibt. Ein entsprechendes Maß $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{min}$ wurde ja bereits aus dem erkenntnisoperationalen Modell abgeleitet, nur dass in diesem Fall die zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten unmittelbar in der Simulation durch das sequentielle Ausführen der beiden Operationen bestimmt wurden, während hier die quantenmechanisch zu bestimmenden Wahrscheinlichkeiten zu verwenden sind. Die Wahrscheinlichkeit $p(\alpha)_\gamma$ folgt unmittelbar aus dem bereits dargestellten quantenmechanischen Formalismus

$$p(\alpha)_\gamma = |\langle \alpha|\gamma\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)$$

während die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma$ – die Messwahrscheinlichkeit $p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma$ nach der Anwendung des Operators \hat{K}_β – etwas umständlicher ist. Da sich nach einer faktischen Messung \hat{K}_β dem quantenmechanischen Formalismus zu Folge das System je nach Messergebnis entweder im Eigenzustand $|\beta\rangle$ oder im Eigenzustand $|\bar{\beta}\rangle$ befindet, wobei sie jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $|\langle \beta|\gamma\rangle|^2$ bzw. $|\langle \bar{\beta}|\gamma\rangle|^2$ auftreten, wird eine Ensemble von Systemen im Zustand $|\gamma\rangle$ nach einer faktisch durchgeführten Messung \hat{K}_β mit beliebigem Ausgang durch den *gemischten Zustand*

$$|\varphi\rangle = |\langle \beta|\gamma\rangle|^2|\beta\rangle + |\langle \bar{\beta}|\gamma\rangle|^2|\bar{\beta}\rangle$$

beschrieben. Hierbei handelt es sich nicht um eine quantenmechanische Superposition, sondern um eine klassische statistische Zustandsbeschreibung: Das System ist mit einer Wahrscheinlichkeit $|\langle \beta|\gamma\rangle|^2$ im Zustand $|\beta\rangle$ oder mit einer Wahrscheinlichkeit von $|\langle \bar{\beta}|\gamma\rangle|^2$ im Zustand $|\bar{\beta}\rangle$, so dass die Wahrscheinlichkeit, die Eigenschaft α zu messen, nachdem die Operation \hat{K}_β auf den Zustand $|\gamma\rangle$ angewandt wurde, durch

$$p(\alpha|\hat{K}_\beta)_\gamma = |\langle\beta|\gamma\rangle|^2 |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 + |\langle\bar{\beta}|\gamma\rangle|^2 |\langle\alpha|\bar{\beta}\rangle|^2$$

gegeben ist.

Die Funktionen $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{quant}^{kom}$ und $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{quant}^{min}$ sind in Abbildung 9a im Vergleich mit den aus dem erkenntnisoperationalen Modell bestimmten Abschätzungen des Effekts der Vertauschung der Reihenfolge dargestellt: Zum einen ist festzustellen, dass die beiden analogen Funktionen $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{quant}^{min}$ (grün) und $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{epis}$ (gepunktet violett) nahezu identisch sind: Die Effekte der Vertauschung der Reihenfolge auf die Ergebnisse der Messung im quantenmechanischen Spin-System und im erkenntnisoperationalen Modell sind also nicht nur in qualitativer Hinsicht – also in Hinsicht auf die charakteristische Form des Verlaufs – sondern auch quantitativ identisch, wobei beide eine deutliche qualitative Ähnlichkeit mit der aus dem quantenmechanischen Kommutator gewonnenen Abschätzung $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{quant}^{kom}$ (rot) aufweisen.

Zusammenfassend lässt sich demnach konstatieren, dass das quantenmechanische Spin-System (1) in sehr guter Näherung die probabilistischen Zusammenhänge zwischen den epistemischen Zuständen des erkenntnisoperationalen Modells reproduziert – die bedingten Wahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen, die Erwartungswerte und Streuungen –, (2) dass beide dabei in gleicher Weise vom klassisch zu erwartenden Verlauf abweichen, und dass (3) in beiden Fällen dieselben komplementären Abhängigkeiten der Resultate von der Reihenfolge der Messung bestehen.

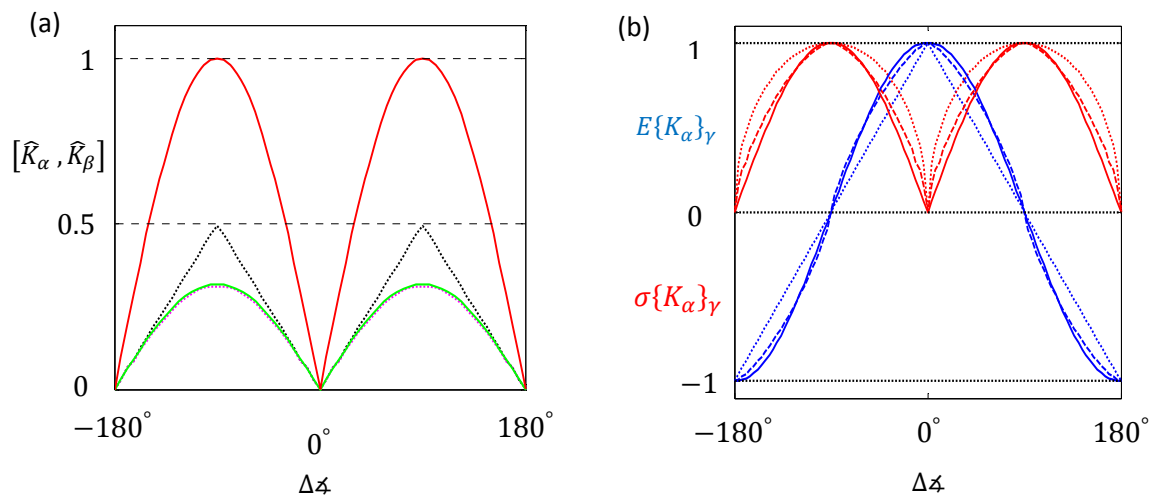


Abbildung 9: (a) Der Effekt der Reihenfolge der Messung auf die Ergebnisse der Messung als Funktion der Winkeldifferenz: Die rote Kurve stellt die aus dem quantenmechanischen Kommutator abgeleitete Abschätzung des Effekts der Veränderung der Reihenfolge $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{quant}^{kom}$ dar, die grüne Kurve die aus den Veränderungen der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten bestimmte Abschätzung $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{quant}^{min}$ – das quantenmechanische Pendant zur gepunkteten violettten Kurve –, während die schwarze gepunktete Kurve die aus dem Modell bestimmte Veränderungswahrscheinlichkeit $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{ont}$ und die violette gepunktete Kurve (kaum hinter der grünen Kurve sichtbar) die aus dem erkenntnisoperationalen Modell bestimmte Veränderungswahrscheinlichkeit $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]_{mod}^{epis}$ repräsentiert. (b) Erwartungswert (blau) und Streuung (rot) des quantenmechanischen Spin-Systems, des erkenntnisoperationalen Modells (blau und rot gestrichelt) als Funktion der Winkeldifferenz von Zustand und Operator. Die entsprechenden Verläufe des klassischen Modells sind als gepunktete Funktionen sichtbar.

Zusammenfassung

Im Focus dieser Arbeit steht die Analyse des Effekts der für einen Informationstransfer notwendigen Wechselwirkung von Repräsentationssystem und Umwelt. Dazu wurde ein makroskopisches, deterministisches Modellsystem entwickelt und dargestellt, das die Kategorisierung von Zuständen eines Objekts über eine faktische Wechselwirkung mit einer Messapparatur simuliert. Die Ergebnisse dieser Simulation wurden (1) mit denen eines klassischen, von der Möglichkeit einer wechselwirkungsfreien Zuordnung der Kategorien zu Zuständen des Objekts ausgehenden Kategoriensystems und (2) mit einem quantenmechanischen Spin-System verglichen. Dieser Vergleich hat (1) gezeigt, dass die wechselwirkungsbasierte Klassifikation in sehr guter Übereinstimmung mit den probabilistischen Eigenschaften des Spin-Systems von dem klassischen Verlauf abweicht, und dass (2) die erkenntnisoperationalen und die quantenmechanischen Ergebnisse in gleicher Weise von der Reihenfolge der Operationen abhängen, was zumindest nahelegt, dass nicht vernachlässigbare Wechselwirkungen im Erkenntnisakt zu komplementären Beziehungen in makroskopischen, deterministischen Repräsentationssystemen führen, die denen der quantenmechanischen Komplementarität analog sind.

Literatur

- AERTS, Diederick (1985), *A possible Explanation for the Probabilities of Quantum Mechanics and an Example of a Macroscopical System that Violates Bell Inequalities*, in: Mittelstaedt / Stachow, (1985), S. 235-249.
- AERTS, Dirk (1986), *A possible Explanation for the Probabilities of Quantum Mechanics*, in: Journal of Mathematical Physics, Vol. 27, Bd. 1, S. 202-210.
- AERTS, Diederik (1987), *The Origin of the Non-Classical Character of the Quantum Probability Model*, in: Blaquiére / Diner / Lochak (1987), S. 77-100.
- AERTS, D. / DURT, T. / GRIB, A.A. / BOGAERT, Van B. / ZAPATRIN, R.R. (1993), *Quantum Structures in Macroscopic Reality*, in: *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. 32, Bd. 3, S. 489-498.
- ATMANSPACHER, Harald / PRIMAS, Hans (2003), *Epistemic and Ontic Quantum Realities*, in: Castell / Ischebeck (2003), S. 301-321. Verfügbar unter (Juni 2009): <http://www.igpp.de/english/tda/pdf/cfvw.pdf>.
- BAUMANN, Kurt / SEXL, Roman U. (Hrsg.)(1984), *Die Deutung der Quantentheorie*, Vieweg & Sohn: Braunschweig / Wiesbaden.
- BEIM GRABEN, Peter (2004), *Incompatibel Implementations of Physical Symbol Systems*, in: Mind and Matter, Vol. 2 (2004), Bd. 2, S. 29-51.
- BEIM GRABEN, Peter (2009), *Extending the Philosophical Significance of the Idea of Complementarity*, in: Atmanspacher / Primas (2009), S. 99-113.
- BEIM GRABEN, Peter / ATMANSPACHER, Harald (2006), *Complementarity in Classical Dynamical Systems*, in: Foundations of Physics, Vol. 36 (2006), S. 291-306. Verfügbar unter (Mai 2009):

http://www.personal.rdg.ac.uk/~lls06prb/pbgpub/JournalPapers/GrabenAtmanspacher.FoundPhys36_2.pdf.

BOHR, Niels (1927), *Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik*, in: Bohr (1931), S. 34-59.

BOHR, Niels (1931), *Atomtheorie und Naturbeschreibung*, Berlin: Springer.

CALUDE, Christian / CALUDE, Elena / SVOZIL, Karl / YU, Sheng (1997), *Physical Versus Computational Complementarity I*, in: International Journal of Theoretical Physics, Vol. 36, Bd.7, S. 1495-1523.

FINKELSTEIN, David / FINKELSTEIN, Shlomit Ritz (1983), *Computational Complementarity*, in: International Journal of Theoretical Physics, Vol. 22, Bd. 8, S. 753-779.

HELD, Carsten (1996), *Die Bohr-Einstein Debatte – Quantenmechanik und physikalische Wirklichkeit*, Schöningh Verlag: Paderborn / München / Wien.

HEISENBERG, Werner (1927), *Über den anschaulichen Inhalt der quantenmechanischen Kinematik und Mechanik*, in: Baumann / Sexl (1984), S. 53-79. Original: Zeitschrift für Physik, Vol. 37 (1927), S. 863-867.

KRALEMANN, Björn (2006), *Umwelt, Kultur, Semantik- Realität*, Leipzig: Leipziger Universitätsverlag.

MERMIN, David N. (1990), *Boojums All the Way Down – Communicating Science In a Prosaic Age*, Cambridge University Press: Cambridge / New York / Melbourne / Sydney.

MOORE, Edward F. (1956), Gedanken-Experiments on Sequential Machines, in: Shannon / McCarthy (1956)(Hrsg), S. 129-153.

SCHEIBE, Erhard (1964), *Die kontingenten Aussagen in der Physik*, Athenäum Verlag: Frankfurt a.M.

SCHEIBE, Erhard (1973), *The Logical Analysis of Quantum Mechanics*, Pergamon Press: Oxford.

SHANNON, C.E. / MCCARTHY J. (1956)(Hrsg.), *Automata Studies*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press: Princeton, New Jersey.

SVOZIL, Karl (1998), *Analogues of Quantum Complementarity in the Theory of Automata*, in: Studies in the History and Philosophy of Modern Physics, Vol. 29, Bd. 1, S. 61-80.