Björn Kralemann

Komplementarität und Wechselwirkung

Zusammenfassung

Thema dieser Arbeit ist die Analyse des Effekts der für einen Informationstransfer notwendigen Wechselwirkung von Repräsentationssystem und Umwelt. Diese Analyse basiert auf einem makroskopischen, deterministischen Modellsystem, das die Kategorisierung von Zuständen eines Objekts über eine faktische Wechselwirkung mit einer Messapparatur simuliert, und in einer vorangehenden Arbeit entwickelt wurde – die vorliegende Arbeit lässt sich als Fortsetzung der dortigen Untersuchungen auffassen. Ziel dieser Arbeit ist es, (1) zu untersuchen, ob die simulierten Erkenntnisoperationen komplementäre Operationen sind, indem (1a) der Frage nachgegangen wird, ob sich die in der Simulation ergebenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Rahmen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie rekonstruieren lassen, und indem (1b) analysiert wird, ob sich die in der Simulation der Erkenntnisoperationen auftretenden, nicht verschwindenden Varianzen reduzieren lassen, oder ob sie – wie im Fall der Quantenmechanik – irreduzibel sind. Es zeigt sich dabei, dass sich (1a) die auftretenden Wahrscheinlichkeiten nicht mit der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie kompatibel sind und dass sich (1b) die auftretenden Varianzen grundsätzlich nicht reduzieren lassen, was beides als Indiz aufgefasst werden kann, dass es sich im Fall der Erkenntnisoperationen um einen genuinen Fall von Komplementarität handelt. Im Rahmen dieser Untersuchung wird (2) eine Konzeption von Komplementarität entwickelt, die die Ergebnisse der Simulation zu erklären und zu verstehen gestattet und auf dem Sachverhalt basiert, dass jede wechselwirkungsbasierte Erkenntnisoperationen im Akt der Repräsentation der Umwelt auch deren Zustände verändert und somit eine Abbildung von Umweltzuständen auf Folgezuständ induziert.

Abstract

Topic of this paper is to study the effect of interactions between representational systems and their environment, which are necessary for every kind of information transfer. This analysis is based on a macroscopic and deterministic model, which simulates the categorization of the states of an object by means of its interaction with some measurement device and was developed in a preceding paper – the present paper can be considered as a prosecution of this first study. The aim of this work is to study, (1) whether these simulated epistemic operations are complementary, by tackling the questions, whether (1a) the distribution of probabilities of the results obtained from the simulation are in accordance with the classical theory of probability and (1b) whether the variances appearing in the results of the simulation can be reduced or whether they are – as in the case of quantum mechanics – irreducible. It is shown, that (1a) the distribution of probabilities indeed is at odds with the classical theory of probability and that (1b) the occurring variances are in principle irreducible. In the context of this inquiry (2) a conception of complementarity is developed, which explains the results of the simulation and which rests on the fact, that epistemic operations based on interaction effect the world and, hence, induce a mapping of environmental states.

Einleitung

Seit der Geburt der Quantenmechanik ist die Debatte um ihre Interpretation durch die Intuition geprägt, dass es die Rückwirkung der auf physikalischen Wechselwirkungen basierenden Messgeräte sei, die für die nicht klassischen, komplementären Absonderlichkeiten des quantenmechanischen Formalismus verantwortlich sind.[1] Es lassen sich in der Geschichte der Interpretation der Quantenmechanik immer wieder Ansätze finden, die quantenmechanischen Anomalien – die komplementäre Struktur ihrer Naturbeschreibung – auf die Rolle des Messprozesses im Aufbau einer empirischen Theorie zurückzuführen: Gemeinsamer Kern dieser Ansätze ist die Hypothese, dass nicht-klassische Anomalien und komplementäre Eigenschaften durch die mit dem Erkenntnisakt verbundenen Prozesse oder Implikationen bedingt sind. Diese Perspektive ist allerdings nicht unumstritten, weil es einerseits fraglich ist, ob eine solche ‚Störungstheorie'[2] überhaupt selbstkonsistent formulierbar ist, und andererseits der Rekurs auf eine im Rahmen einer klassischen Ontologie beschreibbaren Umwelt zur Interpretation der Quantenmechanik durch Argumentationsformen auf der Basis der so genannten Bellschen Ungleichungen[3] in Folge des EPR-Arguments[4] ausgeschlossen erscheint.

Ungeachtet dieser Einwände möchte ich in dieser Arbeit die Hypothese untersuchen, dass komplementäre Formen der Naturbeschreibung darauf zurückzuführen sind, dass es im Rahmen von wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen zu einer dynamischen Abbildung von Umweltzuständen auf Folgezustände kommt. Dabei geht es im Folgenden erst einmal nicht unmittelbar um die naturphilosophische Interpretation,[5] sondern primär darum zu untersuchen, welche Folgen für ein Repräsentationssystems und seine repräsentationalen Zustände diese Interaktionshypothese hat, indem

---

[1] Die paradigmatischen Ansätze stammen von Bohr und Heisenberg:

„In der Tat beruht unsere gewöhnliche Beschreibung der Naturerscheinungen letzten Endes auf der Voraussetzung, dass die in Rede stehenden Phänomene beobachtet werden können, ohne sie wesentlich zu beeinflussen. [...] Nun bedeutet aber das Quantenpostulat, dass jede Beobachtung atomarer Phänomene eine nicht zu vernachlässigende Wechselwirkung mit dem Messungsmittel fordert, und dass also weder den Phänomenen noch dem Beobachtungsmittel eine selbstständige physikalische Realität im gewöhnlichen Sinne zugeschrieben werden kann." Bohr (1927), S. 35.

„Man beleuchte ein Elektron und betrachte es unter einem Mikroskop. Die höchst erreichbare Genauigkeit der Ortsbestimmung ist hier im Wesentlichen durch die Wellenlänge des benutzten Lichtes gegeben. […] Jede Beobachtung des vom Elektron kommenden Streulichts setzte einen lichtelektrischen Effekt (im Auge, auf der photographischen Platte, in der Photozelle) voraus, kann also auch so gedeutet werden, dass ein Lichtquant das Elektron trifft, an diesem reflektiert oder gebeugt wird und dann durch die Linsen des Mikroskops nochmals abgelenkt den Photoeffekt auslöst. Im Augenblick der Ortsbestimmung, also dem Augenblick, in dem das Lichtquant vom Elektron abgebeugt wird, verändert das Elektron seinen Impuls unstetig. Diese Änderung ist umso größer, je kleiner die Wellenlänge des benutzen Lichtes ist, d.h. je genauer die Ortsbestimmung ist. In dem Moment, in dem der Ort des Elektrons bekannt ist, kann daher sein Impuls nur bis auf Größen, die jener unstetigen Änderung entsprechen, bekannt sein; also je genauer der Ort bestimmt ist, desto ungenauer ist der Impuls bekannt und umgekehrt." Heisenberg (1927), S. 55f.

[2] Vgl. z.B. Held (1996), S. 39-41.

[3] Vgl. Bell (1964). Eine didaktisch aufbereitete Darstellung der Argumentation findet sich in Selleri (1983), S. 101-105.

[4] Vgl. Einstein / Podolsky / Rosen (1935).

[5] Es ist also nicht Gegenstand dieser Arbeit, die naturphilosophischen Implikationen und Voraussetzungen des Modells und seiner Ergebnisse zu diskutieren.

solche explizit wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen numerisch simuliert werden:[6] Treten in der Simulation von wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen Effekte auf, die mit denen einer quantenmechanischen Form der Komplementarität in Verbindung gebracht werden können?

Das im Folgenden zu analysierende erkenntnisoperationale Modell wurde in einem vorangehenden Aufsatz[7] entwickelt, so dass sich die vorliegende Arbeit als eine Fortsetzung der ersten Arbeit auffassen lässt. Dort hatte sich gezeigt, dass eine solche wechselwirkungsbasierte Klassifikation von Umweltzuständen in sehr guter Übereinstimmung mit den probabilistischen Eigenschaften von quantenmechanischen Spin-Systemen von dem klassisch zu erwartenden Verlauf der bedingten Wahrscheinlichkeiten abweicht, und dass die erkenntnisoperationalen Ergebnisse – wie die quantenmechanischer Operatoren – von der Reihenfolge der Operationen abhängen, was zumindest den Verdacht nahelegt, dass nicht vernachlässigbare Wechselwirkungen im Erkenntnisakt zu komplementären Beziehungen in deterministischen Repräsentationssystemen führen, die denen der quantenmechanischen Komplementarität analog sind. Im Folgenden geht es darum, diesen Verdacht zu erhärten, indem untersucht wird, ob die simulierten Erkenntnisoperationen weitere typische Charakteristika quantenmechanischer Komplementarität aufweisen – indem der Frage nachgegangen wird, ob sich die in der Simulation ergebenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Rahmen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie rekonstruieren lassen, und indem analysiert wird, ob sich die in der Simulation auftretenden Streuungen reduzieren lassen, oder ob sie – wie im Fall der Quantenmechanik – irreduzibel sind. Es wird sich dabei zeigen, dass die auftretenden Wahrscheinlichkeiten zum einen nicht mit der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie kompatibel sind, und zum anderen, dass sich die auftretenden Varianzen grundsätzlich nicht reduzieren lassen, was beides als Indiz aufgefasst wird, dass es sich im Fall der Erkenntnisoperationen um einen genuinen Fall von Komplementarität handelt. Vor dem Hintergrund dieser Untersuchung wird dabei eine Konzeption von Komplementarität entwickelt, die die Ergebnisse der Simulation zu erklären und zu verstehen gestattet und ausschließlich auf der Annahme basiert, dass es durch jede wechselwirkungsbasierte Erkenntnisoperation im Akt der Repräsentation der Umwelt zu einer Abbildung von Umweltzuständen auf Folgezuständ kommt – dass also jeder wechselwirkungsbasierte Akt der Repräsentation das Repräsentierte transformiert.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Zum Einstieg wird eine einführende Darstellung des Modells der wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen gegeben, die die zentralen Annahmen, Strukturen und bisherigen Ergebnisse zusammenfasst. Im ersten Abschnitt wird dann der Frage nachgegangen, ob sich die in der Simulation ‚empirisch' gefundenen bedingten Wahrscheinlichkeiten auf der Grundlage der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie rekonstruieren lassen. Anschließend wird im zweiten Teil untersucht, ob sich die Streuungen – die Unschärfe der Ergebnisse – durch alternative Varianten der Erkenntnisoperationen eliminieren lassen. Im dritten Teil wird dann abschließend im Rahmen der Diskussion und Interpretation der bisherigen Ergebnisse eine Konzeption der Komplementarität von wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen entwickelt.

---

[6] Hier ist zu betonen ist, dass es sich um ein deterministisches Modell handelt, das in dem Sinne als makroskopisch anzusehen ist, dass es keinerlei spezifisch quantenmechanischen Ingredienzien aufweist: Quantenmechanische Charakteristika werden demnach nicht vorausgesetzt, sondern ergeben sich allein auf der Basis eines klassisch deterministischen Modelles von wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen.

[7] Vgl. Kralemann (2010).

Das erkenntnisoperationale Modell

Da es das Ziel dieser Arbeit ist, die spezifischen Effekte zu untersuchen, die sich daraus ergeben, dass Erkenntnisakte als Operationen aufgefasst werden, deren Informationsgewinn an einen die Informationsübertragung überhaupt erst ermöglichende Wechselwirkung mit der Umwelt gebunden ist, ist es notwendig, als Hintergrund, vor dem sich der Effekt der Wechselwirkung abzeichnen kann, ein zweites – im Folgenden als *klassisches Modell* bezeichnetes – Kategoriensystem zu verwenden, dass dieselben Klassifikationen vornimmt wie das erkenntnisoperationale Modell, aber eben nicht durch eine Wechselwirkung diejenigen Objekte beeinflusst, die es repräsentiert. In diesem Abschnitt geht es darum, diese beiden Kategoriensysteme und ihre zentralen Eigenschaften und Differenzen kurz zu skizzieren,[8] um dann in den folgenden Kapitel die im erkenntnisoperationalen Fall auftretende Komplementarität im Detail zu diskutieren.

Das klassische Kategoriensystem klassifiziert Punkte P_γ, die sich auf einen Kreis befinden, siehe Abbildung 1a: Der ontische Zustand[9] P_γ dieses Systems wird durch den Winkel γ bestimmt, den der Ortsvektor (rot) mit der horizontalen Achse einschließt.

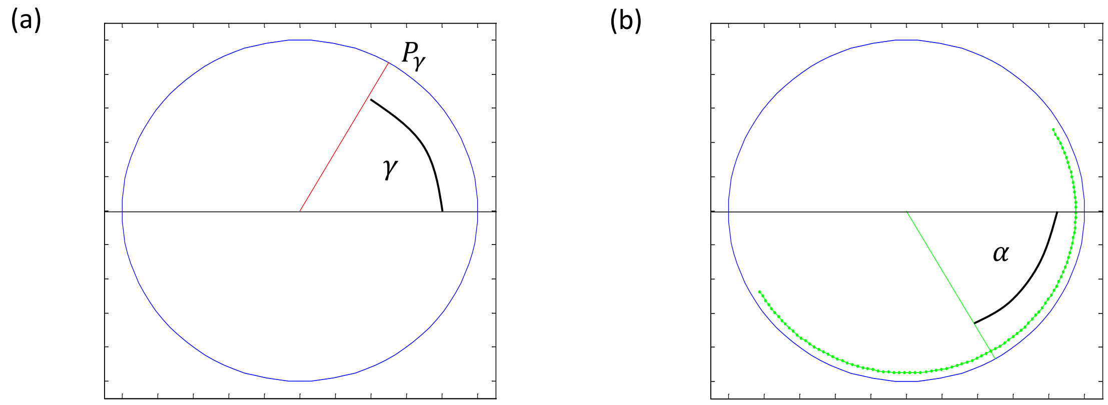

Abbildung 1: (a) Der Punkt auf dem Kreis wird durch den Winkel γ bestimmt. (b) Die Kategorie K_α wird über den Winkel als Menge der Punkte im Bereich $\{\alpha - 90^\circ, \alpha + 90^\circ\}$ (grüner Halbkreis) bestimmt.

Zur Klassifikation der ontischen Zustände wird eine Kategorie K_α eingeführt, indem auf dem Umfang des Kreises ein Bereich definiert wird – der grüne Halbkreis in Abbildung 1b. Dieser Bereich wird über den Winkel α als die Menge der Punkte im Bereich $\{\alpha - 90^\circ, \alpha + 90^\circ\}$ bestimmt. Liegt der Punkt P_γ in diesem Bereich, ist er Element der Kategorie K_α, liegt er außerhalb, ist er kein Element von K_α:

$$P_\gamma \in K_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \in \{\alpha - 90^\circ, \alpha + 90^\circ\} \ ,$$

$$P_\gamma \notin K_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \notin \{\alpha - 90^\circ, \alpha + 90^\circ\} \ .$$

[8] Eine ausführlichere Darstellung findet sich in Kralemann (2010) – dieses Kapitel ist eine knappe Zusammenfassung dieses Aufsatzes.

[9] Als ontische Zustände werden die Zustände des Systems bezeichnet, die es ‚an sich', unabhängig vom hier modellierten Erkenntnisakt besitzt, als epistemische Zustände werden Zustände bezeichnet, die dem System aufgrund der hier modellierten Erkenntnisoperationen zugeschrieben werden, die also das durch Erkenntnisakte gewonnene Wissen über die Umwelt repräsentieren. Zur Anwendung dieser Distinktion in der Interpretation der Quantenmechanik vgl. Atmanspacher / Primas (2003), Scheibe (1964) und Scheibe (1973).

Über die Kategorie K_α und den ontischen Zustand P_γ wird die Aussage $K_\alpha(P_\gamma)$ definiert, die wahr ist, wenn $P_\gamma \in K_\alpha$ gilt, und falsch ist, wenn $P_\gamma \notin K_\alpha$ gilt.

$$K_\alpha(P_\gamma) = w \quad \Leftrightarrow \quad P_\gamma \in K_\alpha$$

$$K_\alpha(P_\gamma) = f \quad \Leftrightarrow \quad P_\gamma \notin K_\alpha$$

Durch die freie Wahl des Winkels α wird auf diese Weise ein Kategoriensystem K_α bestimmt. Der epistemische Zustand $|\psi\rangle$ repräsentiert – im Gegensatz zum ontischen Zustand – das Wissen, das im Rahmen des Kategoriensystem K_α besteht. Ist die Aussage $K_\alpha(P_\gamma)$ wahr, befindet sich das System im epistemischen Zustand $|K_\alpha\rangle$:

$$K_\alpha(P_\gamma) = w \quad \Longrightarrow \quad |\psi\rangle = |\alpha\rangle$$

Das zentrale Moment dieses klassischen Modells besteht darin, dass die Bestimmung des epistemischen Zustands $|\psi\rangle$ einfach durch eine unmittelbare Kenntnisnahme des ontischen Zustands P_γ möglich ist – also ohne dass eine Operation im Sinne einer erkenntnisfundierenden Interaktion notwendig wäre. Es handelt sich hier also um das klassische Bild einer informationstheoretischen ‚Einbahnstraße', in dem Informationen über die Umwelt gewonnen werden können, ohne Informationen über den Erkenntnisprozess oder das jeweilige Repräsentationssystem auf die Umwelt zu übertragen – also ohne deren Zustand zu verändern.

Im Gegensatz zum klassischen Modell liegt dem erkenntnisoperationalen Modell die Annahme zu Grunde, dass jeder Akt einer Repräsentation auf einem Akt der Wechselwirkung mit der Umwelt beruhen muss, der überhaupt erst die für jegliche Form der Informationsübertragung notwendige Kopplung realisiert. Der für dieses Modell zentrale Aspekt der Kopplung besteht in seiner Wechselwirkungsstruktur: Einerseits beeinflusst der Zustand der Umwelt den des Repräsentationssystems – denn andernfalls trügen die repräsentationalen Zustände keinerlei Information über die Umwelt – andererseits beeinflusst aber das Repräsentationssystem den Zustand der Umwelt über die Wechselwirkung, die den Informationstransfer ins Repräsentationssystem erst ermöglicht.

Die ontischen Zustände sind anlog zum klassischen Modell Punkte auf einem Kreis, deren ontische Zustände P_γ wieder durch den Winkel γ bestimmt werden, den der Ortsvektor (rot) mit der horizontalen Achse einschließt – siehe Abbildung 2a. Nur wird in diesem Fall des Weiteren angenommen, dass es sich bei diesem Punkt um ein elektrisch geladenes Teilchen handelt[10] und dass die Zuweisung eines epistemischen Zustands $|\alpha\rangle$ auf einer faktischen Wechselwirkung zwischen Messobjekt und Messgerät beruht, das durch zwei elektrische Ladungen q_a und q_b realisiert wird, die mit dem geladenen Teilchen P_γ, wie in Abbildung 2a dargestellt, wechselwirken: Auf Grund der elektrischen Ladung wirken die Kräfte $\vec{F}_{pa}$und $\vec{F}_{pb}$ entlang der grünen Verbindungslinien zwischen P_γ und den Ladungen q_a und q_b, die es einerseits ermöglichen, den ontischen Zustand P_γ zu klassifizieren – ihm ei-

[10] Ein solches Modellsystem wurde in Aerts (1985), Aerts (1986), Aerts (1987), Aerts / Durt / Grib / Bogaert / Zapatrin (1993) entwickelt und diskutiert, allerdings mit dem Schwerpunkt, die Implikationen der Unkenntnis des Zustands des Messgeräts bei der Messung zu studieren. Von dieser Annahme werde ich hier keinen Gebrauch machen, sondern lediglich die Effekte der unhintergehbaren Wechselwirkung im Rahmen der Mess- oder Repräsentationsoperation diskutieren. Das in der Messung aber nur auf die Relation des Messgeräts und des Messobjekts ankommt, ist dies äquivalent mit eine Unkenntnis des Messobjekts. Vgl. hierzu auch Heylighen (1990), S. 15.

nen epistemischen Zustand $|\alpha\rangle$ zuzuweisen – andererseits aber gleichermaßen auch auf den ontischen Zustand P_γ selbst wirken.

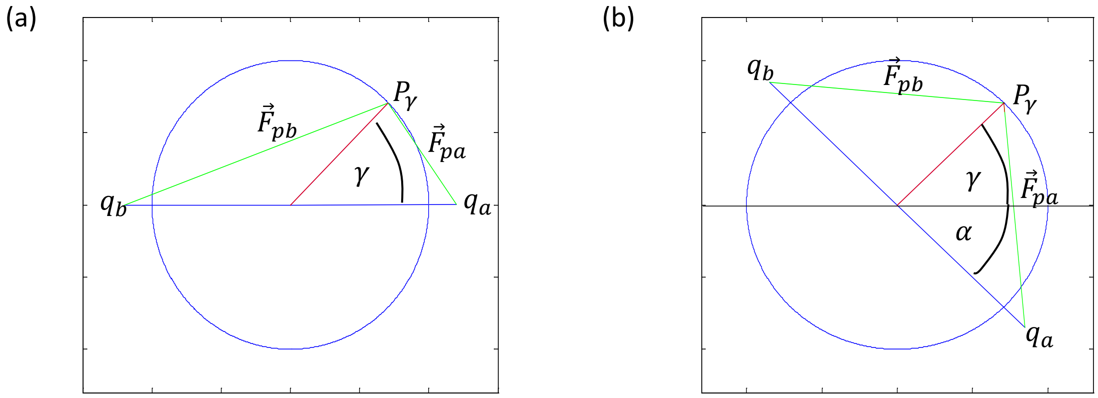

Abbildung 2: (a) Die Position des geladenen Teilchens auf dem Kreis wird durch den Winkel γ seines Ortsvektors mit der horizontalen Achse (rot) bestimmt. Die die Bestimmung eines epistemischen Zustands ermöglichende Erkenntnisoperation basiert auf den sich auf einer Geraden befindlichen Ladungen q_a und q_b: Die zwischen den Ladungen wirkenden Kräfte $\vec{F}_{pa}$ und $\vec{F}_{pb}$ (entlang der grünen Verbindungslinien) ermöglichen einerseits durch ihre Wirkung auf die Ladungen q_a und q_b eine Klassifikation des ontischen Zustands P_γ, wirken aber gleichermaßen auch auf den Zustand P_γ. (b) Die jeweilige Orientierung des Messapparats α führt zu jeweils anderen Kräfteverhältnissen und kann somit zu unterschiedlichen Klassifikationen des gleichen ontischen Zustands führen, so dass jede Orientierung α eine zu unterscheidende, eigenständige Operation definiert.

Die Klassifikation ontischer Zustände wird über die operationale Einführung einer Kategorie geleistet, die als erkenntnisoperationale Kategorie als Operator[11] $\hat{K}_\alpha$ symbolisiert wird: Durch $\hat{K}_\alpha$ wird auf dem Umfang des Kreises der kategoriale Bereich darüber operational definiert, dass für dessen Punkte P_γ der Betrag der Kraft $\vec{F}_{pa}$ größer ist als der der Kraft $\vec{F}_{pb}$ – also darüber, dass die Punkte dichter an der Ladung q_a liegen als an der Ladung q_b, was dem Bereich der Kategorien des klassischen Beispiels entspricht:

$$P_\gamma \in \hat{K}_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{F}_{pa}| > |\vec{F}_{pb}|,$$

$$P_\gamma \notin \hat{K}_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{F}_{pa}| \leq |\vec{F}_{pb}|.$$

Über die Kategorie $\hat{K}_\alpha$ und den ontischen Zustand des Systems P_γ wird die Aussage $\hat{K}_\alpha(P_\gamma)$ definiert, die wahr ist, wenn $P_\gamma \in \hat{K}_\alpha$ gilt, und falsch ist, wenn $P_\gamma \notin \hat{K}_\alpha$ gilt:

$$\hat{K}_\alpha(P_\gamma) = w \quad \Leftrightarrow \quad P_\gamma \in \hat{K}_\alpha,$$

$$\hat{K}_\alpha(P_\gamma) = f \quad \Leftrightarrow \quad P_\gamma \notin \hat{K}_\alpha.$$

[11] Repräsentations- oder Erkenntnisakte als Operatoren zu konzipieren, die auf die Elemente des ontischen Zustandsraum wirken, drückt demnach aus, die Wechselwirkungen, die Bedingungen der Möglichkeit eines Informationstransfers, nicht als informationsübertragende ‚Einbahnstraße' zu idealisieren, sondern konsequenter Weise davon auszugehen, dass sie als Wechselwirkungen eben gleichermaßen den Zustand des Systems verändern: „The action of observables on states corresponds to the active interpretation of observables changing the state of a system." Atmanspacher / Römer / Walach (2004), S. 10.

Je nach Orientierung α der Verbindungslinie der Ladungen q_a und q_b entstehen dabei andere Kräfteverhältnisse, siehe Abbildung 2b, so dass es zu anderen Klassifikationen derselben ontischen Zustände kommen kann: Jede Wahl einer Messrichtung definiert eine eigenständige Erkenntnisoperation und Kategorie $\widehat{K}_\alpha$. Wie im klassischen Beispiel, wird durch die freie Wahl des Winkels α ein operationales Kategoriensystem $\widehat{K}_\alpha$ bestimmt. Der epistemische Zustand des Systems $|\psi\rangle$ repräsentiert auch hier – im Gegensatz zum ontischen Zustand – das Wissen, das im Rahmen des Kategoriensystem $\widehat{K}_\alpha$ auf der Basis der entsprechenden Erkenntnisoperation besteht. Ist die Aussage $\widehat{K}_\alpha(P_\gamma)$ wahr, befindet sich das System im epistemischen Zustand $|\alpha\rangle$:

$$\widehat{K}_\alpha(P_\gamma) = w \quad \Longrightarrow \quad |\psi\rangle = |\alpha\rangle$$

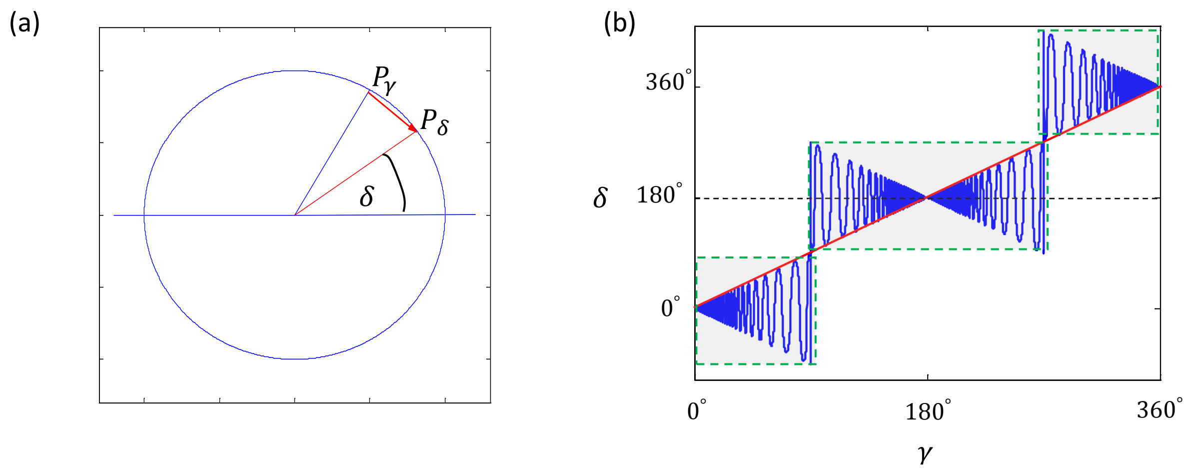

Abbildung 3: (a) Durch die die Erkenntnisoperation ermöglichende elektrostatische Wechselwirkung wird der ontische Zustand P_γ in den ontischen Zustand P_δ transformiert (roter Pfeil). (b) Die blaue Kurve stellt die Abbildung des Zustands vor der Messung P_γ auf den Zustand nach der Messung P_δ für alle Werte des Winkels γ dar. Die rote Linie ist die identische Abbildung, die der Situation entspräche, dass die Erkenntnisoperation den Zustand nicht verändert und somit jeden Zustand auf sich selbst abbildet. In den grau unterlegten Bereichen ist die Abbildung nicht umkehrbar, weil unterschiedliche Zustände dieser Intervalle auf identische Zustände abgebildet werden – der Effekt der Erkenntnisoperation ist dort irreversibel.

Im Gegensatz zum klassischen Beispiel wirkt aber die Klassifikationsoperation auf den ontischen Zustand des Systems P_γ zurück, so dass es auf Grund der wirkenden Kräfte zu einer Verschiebung des geladenen Teilchens (roter Pfeil) kommt und sich das System nach der Messung im ontischen Zustand P_δ befindet, siehe Abbildung 3a.[12] Für jeden der möglichen ontischen Zustände P_γ kommt es demnach durch die Erkenntnisoperation $\widehat{K}_\alpha$ zu einer Abbildung auf einen Folgezustand P_δ, die von der relativen Lage von P_γ zur Messrichtung α abhängt: Abbildung 3b zeigt diese durch die Erkenntnisoperation in Richtung $\alpha = 0^\circ$ induzierte Transformation der ontischen Zustände: Auf der horizontalen Achse ist der Winkel des geladenen Teilchens γ vor der Messung und auf der senkrechten Achse der Winkel des Teilchens nach der Messung δ dargestellt – die blaue Kurve beschreibt die Abbildung $\gamma \to \delta$ durch die Erkenntnisoperation. Von besonderer Bedeutung sind die jeweils grau unterlegten Bereiche: In diesen Bereichen ist die Abbildung nicht umkehrbar, weil unterschiedliche Werte von γ vor der Messung auf gleiche Werte δ nach der Messung abgebildet werden, die daher durch jede weitere Folgeoperation identisch klassifiziert und transformiert werden und somit durch keine weitere Erkenntnisoperation mehr unterschieden werden können. Jede Erkenntnisoperation führt aufgrund der Wechselwirkung zu einem unhintergehbaren, irreversiblen Informationsverlust hinsichtlich des ursprünglichen ontischen Zustands. Die Bedingung der Möglichkeit der Zuweisung

[12] Die Details dieser Dynamik sind in Kralemann (2010), S. 9-10 dargestellt.

eines epistemischen Zustands ist zugleich die Ursache einer unhintergehbaren, irreversiblen Veränderung des ontischen Zustands.

Um die Implikationen der Wechselwirkungen zu analysieren, wird eine Versuchsreihe simuliert, in der die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse unterschiedlicher Erkenntnisoperationen bestimmt werden, um diese mit denen des klassischen Kategoriensystems zu vergleichen. Ausgehend von einer homogenen Wahrscheinlichkeitsverteilung der ontischen Zustände $p(P_\gamma) = konst.$ werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(|\alpha\rangle||\beta\rangle)$ bestimmt, nach einer Messung des epistemischen Zustands $|\beta\rangle$ durch die Erkenntnisoperation $\widehat{K}_\beta$ mit der Operation $\widehat{K}_\alpha$ den epistemischen Zustand $|\alpha\rangle$ festzustellen. Die festgestellten bedingten Wahrscheinlichkeiten hängen allein von der Winkeldifferenz $\Delta\measuredangle(\alpha,\beta) = \alpha - \beta$ der Erkenntnisoperationen ab,

$$p(|\alpha\rangle||\beta\rangle) = p(\Delta\measuredangle(\alpha,\beta)),$$

und sind in Abbildung 4a als rote Funktion dargestellt.[13] Die entsprechende Verteilung der bedingten Wahrscheinlichkeiten im klassischen Kategoriensystem lässt sich analytisch aus der Überschneidung der kategorialen Bereiche berechnen[14] und folgt dem Zusammenhang

$$p(|\alpha\rangle||\beta\rangle) = 1 - \frac{|\Delta\measuredangle(\alpha,\beta)\,|}{180^\circ}.$$

und ist in Abbildung 4a als blaue Funktion dargestellt. Offensichtlich kommt es hier durch die Wechselwirkung der Erkenntnisoperationen zu einer Abweichung gegenüber dem klassischen Kategoriensystem, deren Verlauf den bedingten Wahrscheinlichkeiten eines quantenmechanischen Spin-Systems entspricht.[15]

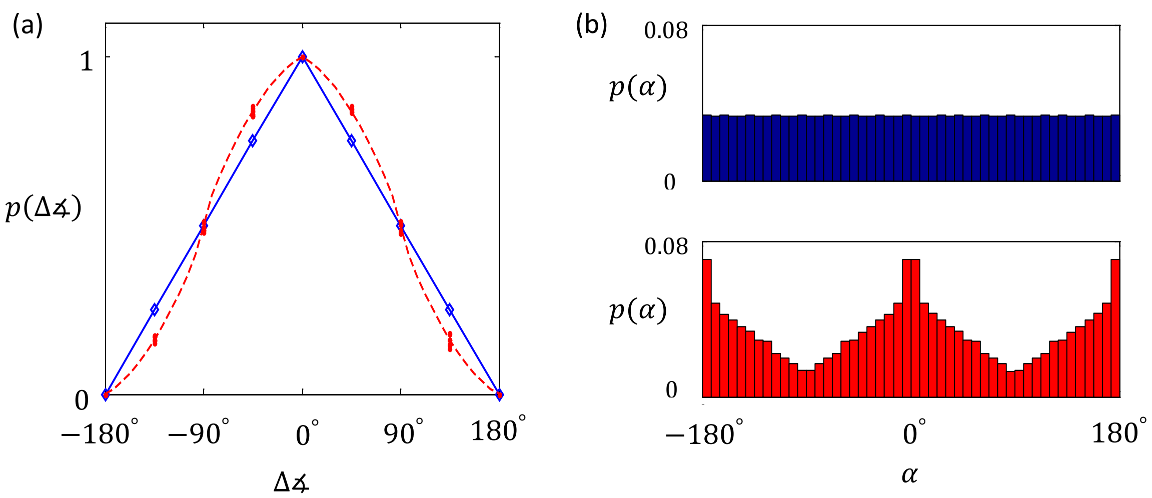

Abbildung 4: (a) Die Abhängigkeit der bedingten Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände von ihrer Winkeldifferenz $\Delta\measuredangle$ ist als gestrichelte rote Line dargestellt. Die blaue Line stellt den Verlauf des entsprechenden klassischen Kategoriensystems dar. (b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der ontischen Zustände vor der Erkenntnisoperation $\widehat{K}_0$ (blau, obere Grafik) und nach der Operation (rot, untere Grafik): Durch die Erkenntnisoperation kommt es zu einer Zunahme der Wahrscheinlichkeit, zentriert um die Messrichtung und einer entsprechenden Abnahme senkrecht dazu.

13 Vgl. Kralemann (2010), S. 10—13.
14 Vgl. Kralemann (2010), S. 4-6.
15 Vgl. Kralemann (2010), S. 20-21.

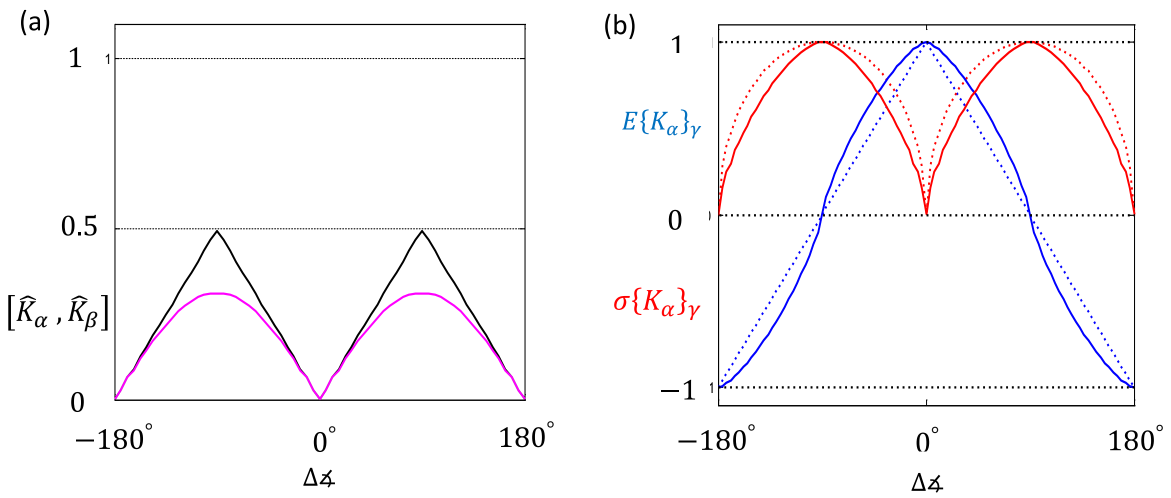

Abbildung 5: (a) Der Effekt der Reihenfolge der Erkenntnisoperationen auf die Ergebnisse als Funktion der Winkeldifferenz: Die schwarze Kurve zeigt die direkt aus den ontischen Zuständen der Simulation bestimmte relative Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]^{ont}_{mod}$, dass es zu einer Veränderung des jeweiligen Resultats kommt, während die violette Kurve die indirekt aus den Veränderungen der Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände bestimmten Veränderungswahrscheinlichkeit $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]^{epis}_{mod}$ präsentiert. (b) Erwartungswert (blau) und Streuung des erkenntnisoperationalen Modells als Funktion der Winkeldifferenz von Zustand und Operator. Die entsprechenden Verläufe des klassischen Modells sind als gepunktete Funktionen sichtbar.

Dieser Verdacht einer substantiellen Entsprechung mit quantenmechanischen Zusammenhängen wird durch den Sachverhalt erhärtet, dass die Ergebnisse der Erkenntnisoperationen von der Reihenfolge ihrer Ausführung abhängen, da eine solche Form der Abhängigkeit eine charakteristische Implikation quantenmechanischer Komplementarität ist, die durch den so genannten Kommutator ausgedrückt wird: Der Kommutator gibt an, in welchem Maße die Ergebnisse unterschiedlicher Erkenntnisoperationen, $\hat{A}$ oder $\hat{B}$, von der Reihenfolge ihrer Anwendung abhängen, was sich letztlich auf die Frage reduzieren lässt, ob die Resultate einer Operation $\hat{A}$ davon abhängen, ob vorher eine Operation $\hat{B}$ durchgeführt wurde oder nicht. Für die Erkenntnisoperationen wurden dem Sinn nach zwei Varianten eines Kommutators definiert – einmal auf der Basis der Veränderung einzelner Zustände durch die Operation, $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]^{ont}_{mod}$, und einmal auf der Basis der Veränderung von Wahrscheinlichkeiten durch die Reihenfolge der Operationen, $[\hat{K}_\alpha, \hat{K}_\beta]^{epis}_{mod}$ –,[16] die die Wahrscheinlichkeit quantifizieren, dass es durch die Veränderung der Reihenfolge zweier Erkenntnisoperationen $\hat{K}_\alpha$ und $\hat{K}_\beta$ zu einer Veränderung ihrer Ergebnisse kommt – die also angeben, in welchem Maße die Ergebnisse von der Reihenfolge der Erkenntnisoperationen abhängen. Diese Größen hängen allein von der Winkeldifferenz der Erkenntnisoperationen, $\Delta\measuredangle = \alpha - \beta$, ab und sind in Abbildung 5a dargestellt. Ihr Verlauf entspricht qualitativ dem des quantenmechanischen Kommutators eines Spin-Systems,[17] während für das klassische Kategoriensystem per Konstruktion die Ergebnisse nicht von der Reihenfolge ihrer Feststellung abhängen können.

Die in Abbildung 3b dokumentierte Veränderung der ontischen Zustände durch die Erkenntnisoperationen drückt sich nicht nur in der durch den Kommutator quantifzierten Abhängigkeit der Ergebnisse von der Reihenfolge ihrer Messung aus, sondern manifestiert sich ebenfalls in einem Effekt auf die Gesamtheit aller möglichen ontischen Zustände – in einer Veränderung ihrer Wahrscheinlichkeitsver-

[16] Vgl. Kralemann (2010), S. 14-18.
[17] Vgl. Kralemann (2010), S. 22-24.

teilung: Wie Abbildung 4b zeigt, kommt es durch jede Erkenntnisoperation zu einer Konzentration der Wahrscheinlichkeitsverteilung der ontischen Zustände längs der Messrichtung, so dass aufeinander folgende Erkenntnisoperationen nicht Ergebnisse bezüglich einer invarianten, zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung hervorbringen, sondern immer auch die Veränderung dieser Verteilung durch den Erkenntnisakt reflektieren.

Die den bedingten Wahrscheinlichkeiten entsprechenden Mittelwerte (blaue durchgezogene Funktion) und Standardabweichen[18] (rote durchgezogene Funktion) bzw. Streuungen sind in Abbildung 4b zu sehen. Die entsprechenden Ergebnisse des klassischen Kategoriensystems sind gepunktet dargestellt. Die Erwartungswerte folgen in beiden Fällen dem Verlauf der Wahrscheinlichkeiten und sind genau dann mit dem maximalen bzw. minimalen Messwert identisch, wenn die Messwahrscheinlichkeit $p(\Delta\measuredangle) = 1$ bzw. $p(\Delta\measuredangle) = 0$ ist. Entsprechend verschwinden die Streuungen für die entsprechenden Winkeldifferenzen von $\Delta\measuredangle = 0^{\circ}$ und $\Delta\measuredangle = 180^{\circ}$ – also wenn die Wahrscheinlichkeiten $p(\Delta\measuredangle) = 1$ oder $p(\Delta\measuredangle) = 0$ sind. Das Ergebnis einer Erkenntnisoperation $\widehat{K}_\alpha$ lässt sich nur dann streuungsfrei messen, wenn sich das System ohnehin schon in dem epistemischen Zustand befindet, dessen Vorliegen durch die Erkenntnisoperation geprüft werden soll, oder in der Negation dieses Zustands. Dies gilt allerdings gleichermaßen auch für das klassische Kategoriensystem.

Wie die skizzierten Ergebnisse zeigen, kommt es aufgrund der Wechselwirkung der Erkenntnisoperationen zu einer Abweichung der Wahrscheinlichkeiten vom Verlauf des klassischen Kategoriensystems, die dem Verlauf bedingter Wahrscheinlichkeiten komplementärer Operatoren quantenmechanischer Spin-Systeme entspricht, und zu einer für die Quantenmechanik typischen Abhängigkeit der Ergebnisse von der Reihenfolge der Messung. Es liegt demnach der Verdacht nahe, die Abweichung gegenüber dem klassischen Kategoriensystem darauf zurückzuführen, dass es sich bei den wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen um im Sinne der Quantenmechanik komplementären Operationen handelt, nur dass sie hier in einem per Konstruktion deterministischen und makroskopischen Zusammenhang auftreten. Ziel der folgenden Kapitel ist es, diese Hypothese zu überprüfen, indem untersucht wird, ob die Erkenntnisoperationen zwei Eigenschaften aufweisen, die für komplementäre Operatoren der Quantenmechanik typisch sind:

(a) Die bedingten Wahrscheinlichkeiten quantenmechanischer Operatoren lassen sich unter Annahme feststehender Objekteigenschaften nicht im klassischen Wahrscheinlichkeitskalkül beschreiben.

(b) Die mit komplementären Operatoren verbundenen Streuungen sind irreduzibel, in dem Sinne, dass sich eine durch die Unschärferelation bestimmte wechselseitige Beschränkung nicht durch eine Präzisierung der Erkenntnisoperationen unterschreiten lässt: Komplementäre Erkenntnisoperationen lassen sich relativ zueinander prinzipiell nicht scharf messen: Sind die Operationen $\widehat{K}_\alpha$ und $\widehat{K}_\beta$ komplementär, dann lässt sich $\widehat{K}_\alpha$ nicht streuungsfrei messen, wenn das System sich in dem durch die Operation $\widehat{K}_\beta$ festgestellten epistemischen Zustand $|\beta\rangle$ befindet – und vice versa.

Es wird demnach im Folgenden um die Frage gehen, ob sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten zwischen den Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_\alpha$ durch das klassische Wahrscheinlichkeitskalkül beschreiben lassen und ob es möglich ist, die Streuung der Erkenntnisoperationen durch eine Präzisierung der Operationen zu eliminieren.

[18] Vgl. Kralemann (2010), S. 13f.

Komplementarität und klassische Wahrscheinlichkeiten

Wie in Abbildung 4a zu sehen ist, weicht die Verteilung der bedingten Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse aufeinanderfolgender Erkenntnisoperation von dem klassisch zu erwartenden Verlauf ab, wobei diese Abweichung darüber hinaus den bedingten Wahrscheinlichkeiten von Messungen an einem quantenmechanischen Spin-System entspricht. In diesem Abschnitt soll nun der Frage nachgegangen werden, ob diese erkenntnisoperationalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen lediglich von dem hier zu erwartenden klassischen Verlauf abweichen, aber grundsätzlich durch die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie und das Konzept klassischer Objekteigenschaften erfasst werden können, oder ob es sich dabei – wie im Fall quantenmechanischer Wahrscheinlichkeiten – um grundsätzlich neue, nicht-klassische Zusammenhänge von Wahrscheinlichkeiten handelt. Wäre Letzteres der Fall, könnte dies als weiterer Beleg dafür angesehen werden, dass es sich bei wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen um genuin komplementäre Operationen handelt.

Die Beziehung zwischen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie und dem Konzept klassischer Objekteigenschaften ergibt sich aus der mit der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie verbundenen Modellvorstellung des Ziehens von Bällen aus einer Urne:[19] Die Bälle in der Urne besitzen autonome, unabhängig von irgendwelchen Kontexten bestehende und definierte klassische Objekteigenschaften und sind jeweils durch ihre je spezifische Eigenschaftskombination bestimmt. Die Zusammensetzung der Urne ist durch die Wahl des Umfangs der Menge von Bällen für jede mögliche Eigenschaftskombination festgelegt, so dass sich aus der relativen Häufigkeit der jeweils gezogenen Eigenschaftskombinationen die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens ergibt. Für diese Modellvorstellung sind zwei Annahmen konstitutiv:[20] (1) Jeder der Bälle besitzt seine jeweilige Eigenschaftskombination unabhängig von der Ziehung, so dass (2) durch die Zusammenstellung dieser Bälle eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung *aller* möglichen Ereigniskombinationen definiert ist, aus der sich alle weiteren Wahrscheinlichkeiten – wie etwa bedingte Wahrscheinlichkeiten, oder die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Eigenschaft – ergeben. Eine klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung von Objekteigenschaften ist demnach dadurch definiert, dass es wenigstens eine mögliche Wahl von Mengenverhältnissen von Eigenschaftskombinationen gibt, die zu der fraglichen Wahrscheinlichkeitsverteilung führt, was äquivalent damit ist, dass eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung aller möglichen Ereigniskombinationen existiert. Lässt sich andererseits zeigen, dass es für bestimmte Zusammenhänge zwischen Wahrscheinlichkeiten keine mögliche Wahl von Mengenverhältnissen von Eigenschaftskombinationen geben kann, folgt, dass der fragliche Zusammenhang von Wahrscheinlichkeiten mit wenigstens einer der das klassische Urnenmodell definierenden Annahmen inkompatibel ist. In diesem Fall müsste also entweder die Annahme aufgegeben werden, dass die Eigenschaften der Bälle und so die Zusammensetzung der Urne autonom und unabhängig vom Kontext feststehen, oder aber die Annahme, dass die Menge der Bälle mit bestimmten Eigenschaftskombinationen in der Urne unabhängig vom jeweiligen Kontext bestimmt sind – in jedem Fall aber müssten Kontextabhängigkeiten angenommen werden. Diesen Überlegungen folgend wird im Folgenden untersucht, ob sich die in Abbildung 4a als rote Funktion dargestellten bedingten Wahrscheinlichkeiten der Erkenntnis-

[19] Zur Auffassung, dass die quantenmechanischen Interpretationsprobleme Implikationen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie und der Annahme ihrer Anwendbarkeit sind, vgl. Pitowsky (1989), S. 50.

[20] Vgl. Wright (1990), S. 881: Um die in der Quantenmechanik auftretenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Besonderheiten zu verstehen, studiert Wright die Wahrscheinlichkeitsverteilung komplementärer Eigenschaften auf der Basis eines verallgemeinerten Urnenmodells, das auch zur Modellierung inkompatibler Messungen geeignet ist.

operationen im Rahmen dieser Modellvorstellung rekonstruieren lassen: Gibt es ein mögliches Mengenverhältnis von klassischen Eigenschaftskombinationen, mit der die gemessenen bedingten Wahrscheinlichkeiten reproduziert werden können?

Hierzu werden nicht alle Zustände betrachtet, sondern nur die Zustände $|0^\circ\rangle$, $|45^\circ\rangle$ und $|315^\circ\rangle$: Dies entspricht den drei roten Punkten am Maximum der Verteilung,[21] die im Folgenden einer gegen den Uhrzeigersinn laufenden Nummerierung von um 45° verschobenen epistemischen Zuständen entsprechend als $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|8\rangle$ bezeichnen werde.[22] Die Anzahl der Fälle, in denen diese epistemischen Zustände zugesprochen werden, werden als

$$n(1)\,,\; n(2),\;\; n(8)$$

Bezeichnet; die Anzahl der Fälle, die jeweils eine Kombination dieser Eigenschaften aufweisen, als

$$n(1,2)\,,\; n(2,8),\;\; n(8,1).$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis b unter der Bedingung der Gegebenheit eines Ereignisses a auftritt, entspricht dann dem Verhältnis der Anzahl von Fällen, die sowohl die Eigenschaft a und b aufweisen, zur Anzahl der Fälle, die nur die Eigenschaft a aufweisen.

$$p(b|a) = \frac{n(b,a)}{n(a)}$$

Für diese drei epistemischen Zustände mit den Winkeldifferenzen

$$\Delta\measuredangle(1,2) = \Delta\measuredangle(2,1) = 45^\circ,$$

$$\Delta\measuredangle(1,8) = \Delta\measuredangle(8,1) = 45^\circ,$$

$$\Delta\measuredangle(2,8) = \Delta\measuredangle(8,2) = 90^\circ$$

ergeben sich dann aus Abbildung 4a die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten:[23]

$$p(2|1) = \frac{n(1,2)}{n(1)} = p(1|2) = \frac{n(1,2)}{n(2)} = 0.85,$$

$$p(8|1) = \frac{n(1,8)}{n(1)} = p(1|8) = \frac{n(1,8)}{n(8)} = 0.85,$$

$$p(2|8) = \frac{n(2,8)}{n(8)} = p(8|2) = \frac{n(2,8)}{n(2)} = 0.5.$$

Aus der Symmetrie der bedingten Wahrscheinlichkeiten wie etwa

$$\frac{n(1,2)}{n(1)} = \frac{n(1,2)}{n(2)}$$

---

[21] Jede andere Kombination unmittelbar benachbarter, um 45° verschobener Zustände ist gleichermaßen für die folgende Argumentation verwendbar.

[22] Die Zustände bzw. Eigenschaften werden im Folgenden schlicht durch die drei Ziffern symbolisiert.

[23] Die in der Simulation ermittelten Werte werden hier etwas genährt.

ergeben sich folgende Beziehungen zwischen der Anzahl der Fälle, die nur durch jeweils eine Eigenschaft bestimmt sind:

$$n(1) = n(2) = n(8).$$

Es folgt dann

$$n(1{,}2) = 0.85 \cdot n(1),$$

$$n(1{,}8) = 0.85 \cdot n(1),$$

und für die Anzahl der Fälle, die die Eigenschaft 1, aber nicht die Eigenschaft 2 aufweisen

$$n(1, \sim 2) = 0.15 \cdot n(1).$$

Da sowohl 85% der Fälle mit der Eigenschaft 1 auch die Eigenschaft 2 besitzen, als auch 85% der Fälle mit der Eigenschaft 1 die Eigenschaft 8, muss es eine Schnittmenge dieser Mengen geben, in der die Elemente alle drei Eigenschaften aufweisen.

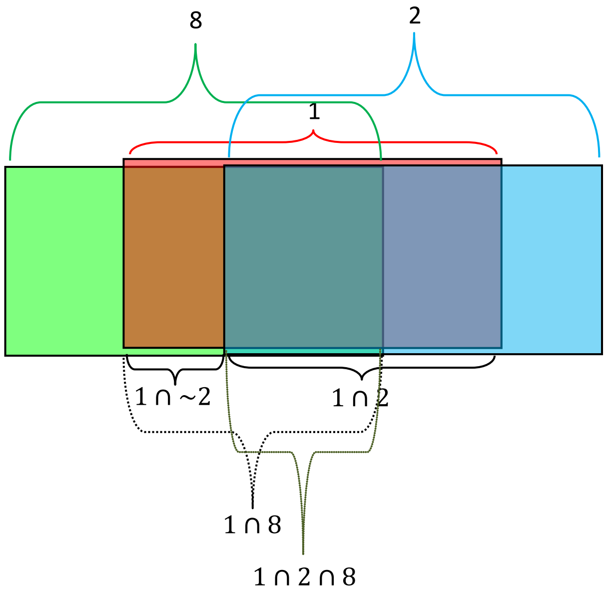

Abbildung 6: Die Überschneidung der drei Eigenschaftsmengen 1, 2 und 8: Die durch die hohe bedingte Wahrscheinlichkeit erzwungene starke Überschneidung der Mengen 1 und 2 – 1 ∩ 2 –, sowie 1 und 8 – 1 ∩ 8 – führt zu einer nicht umgehbaren Mindestüberschneidung der Mengen 2 und 8 in der Schnittmenge 1 ∩ 2 ∩ 8.

Es geht nun darum, eine untere Grenze des Umfangs dieser Menge zu bestimmen – also den Umfang, bei der eine minimale Anzahl von Fällen alle drei Eigenschaften aufweisen, aber 85% der Fälle mit der Eigenschaft 1 die Eigenschaft 8 und 85% der Fälle mit der Eigenschaft 1 die Eigenschaft 2 besitzen. Man kann unter der Nebenbedingung, dass die Menge 8 die Menge 2 nicht schneiden darf, die Menge 8 nur so mit der Menge 1 zum Schnitt bringen, dass die Schnittmenge $1 \cap 8$ Teilmenge der Menge $(1, \sim 2)$ ist:

$$1 \cap 8 \subseteq (1, \sim 2).$$

Wenn 85% der Menge 1 auch die Eigenschaft 2 besitzen, dann ist der Umfang der Menge $(1, \sim 2)$ gleich der Anzahl $0.15 \cdot n(1)$, so dass der maximale Umfang der Schnittmenge $1 \cap 8$ unter dieser Nebenbindung $1 \cap 8 = (1, \sim 2) = 0.15 \cdot n(1)$ ist. Für jede weitere Vergrößerung der Schnittmenge $1 \cap 8$ muss die Nebenbedingung zwangsläufig verletzt werden, so dass jedes weitere Element dieser Schnittmenge in der Menge $(1,2)$ und so auch in der Schnittmenge $1 \cap 2 \cap 8$ liegen muss. Diese Art der Konstruktion führt aber immer zu einer Schnittmenge $1 \cap 2 \cap 8$ mit minimalem Umfang. Die Menge $1 \cap 2 \cap 8$ ist demnach dann minimal, wenn *alle* Fälle, die die Eigenschaft 1 aber nicht die Eigenschaft 2 aufweisen, in der Menge der Fälle liegen, die die Eigenschaften 1 und 8 aufweisen:

$$n(1,2,8) > n(1,8) - n(1, \sim 2) = (0.85 - 0.15) \cdot n(1) = 0.7 \cdot n(1)$$

Da die Anzahl der Fälle, die nur die Eigenschaften 2 und 8 haben, größer oder gleich der Anzahl der Fälle sein muss, die die Eigenschaften 2, 8 *und* 1 haben, folgt

$$n(2,8) \geq n(1,2,8) > 0.7 \cdot n(1).$$

Für die untere Grenze der bedingten Wahrscheinlichkeiten der epistemischen Zustände $|8\rangle$, $|2\rangle$ ergibt sich dann mit der Identität $n(1) = n(2) = n(8)$

$$p(2|8) = \frac{n(2,8)}{n(8)} \geq \frac{0.7 \cdot n(1)}{n(8)} = \frac{0.7 \cdot n(1)}{n(1)} = 0.7$$

$$p(8|2) = \frac{n(2,8)}{n(2)} \geq \frac{0.7 \cdot n(1)}{n(2)} = \frac{0.7 \cdot n(1)}{n(1)} = 0.7$$

Aus der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie ergibt sich aus den in der Simulation der Erkenntnisoperationen festgestellten bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(2|1)$ und $p(8|1)$ sowie ihrer Symmetrie eine untere Grenze für die bedingten Wahrscheinlichkeiten von $p(2|8) \geq 0.7$ und $p(8|2) \geq 0.7$, die nicht mit den in der Simulation festgestellten Werten von $p(2|8) = p(8|2) = 0.5$ kompatibel sind: Die Zustände $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|1\rangle$, $|8\rangle$ sind jeweils zu stark korreliert, als dass nach der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie die Zustände $|2\rangle$, $|8\rangle$ so schwach korreliert sein könnten, wie sie es in der Simulation sind.

Die Ergebnisse der Simulation weichen daher nicht nur von der klassischen Erwartung desselben kategorialen Schemas ab, sondern sind überhaupt nicht durch eine klassische Wahrscheinlichkeitsverteilung reproduzierbar – sie sind nicht mit der Annahme kontextunabhängiger Eigenschaften bzw. der Annahme einer kontextinvarianten Zusammensetzung der Urne – der Existenz einer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung aller Eigenschafts- bzw. Ereigniskombinationen – verträglich. Die explizite Berücksichtigung der Wechselwirkung von Repräsentationssystem und Umwelt – die Konzeption einer Erkenntnisoperation – führt demnach dazu, dass es zwar möglich ist, bedingte Wahrscheinlichkeiten für jede Eigenschaftskombination anzugeben, nicht aber, *eine gemeinsame* Wahrscheinlichkeitsverteilung für alle Eigenschaftskombinationen zu definieren. Dieser auch für den quantenmechanischen Formalismus charakteristische Sachverhalt, kann demnach als weiterer Beleg interpretiert werden, dass es sich bei den Erkenntnisoperationen um genuin komplementäre Operationen handelt.

Dieser nicht-klassische Charakter der Verteilung der bedingten Wahrscheinlichkeiten korrespondiert mit der bereits angesprochenen und in Abbildung 5a dargestellten Abhängigkeit der Ergebnisse der Erkenntnisoperationen von der Reihenfolge ihrer Durchführung, was sich im Vergleich mit klassischen Kategoriensystems verdeutlichen lässt. Im klassischen Fall spielt die zeitliche Folge der Erkenntnisakte keine Rolle, weil das Ergebnis jeder Messung unabhängig von vorhergehenden Ereignissen immer dasselbe ist, so dass sich die zeitliche Folge auch beliebig invertieren ließe: Der Akt der Kategorisierung ist für das Ergebnis bzw. für folgende Ergebnisse nicht konstitutiv, sondern stellt lediglich fest, was unabhängig davon der Fall ist – die bedingten Wahrscheinlichkeiten sind hier keine eigenständige Informationsquelle, sondern lediglich Ausdruck der in der invarianten, zugrunde liegenden gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung immer schon bestehenden Zusammenhänge. Weil die zeitliche Reihenfolge irrelevant ist, können die in zeitlicher Folge erfassten Ergebnisse als Ausdruck simultan bestehender Verhältnisse aufgefasst werden. Diese Autonomie gegenüber der zeitlichen Ordnung ist im klassischen Fall darin begründet, dass sowohl die kategorialen Bereiche als auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der ontischen Zustände konstant bzw. zeitlich invariant sind, so dass für die Abbildung auf die epistemischen Zustände eben die zeitliche Ordnung keine Rolle spielt.

Im Fall der Erkenntnisoperationen hingegen hängen die Ergebnisse von der Reihenfolge ihrer Durchführung ab, so dass diese eben nicht irrelevant ist und nacheinander festgestellte Ergebnisse gleichermaßen nicht als Ausdruck invarianter, simultan bestehender Verhältnisse interpretiert werden können, weil die Bedingung der Möglichkeit der epistemischen Klassifikation eines ontischen Zustands seine Veränderung ist. Es sind zwar die kategorialen Bereiche der Erkenntnisoperationen invariant, nicht aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung der ontischen Zustände: Jede Operation verändert als unhintergehbarer Effekt der Wechselwirkung den jeweils bestehenden ontischen Zustand und daher auch die jeweils bestehende Wahrscheinlichkeitsverteilung der ontischen Zustände, wie sich in Abbildung 4b sehen lässt: Vor der Operation $\widehat{K}_0$ ist die Wahrscheinlichkeit der ontischen Zustände über den gesamten Kreis bzw. über alle Winkel gleich verteilt (blaues Histogramm), nach der Operation $\widehat{K}_0$ (rotes Histogramm) hingegen ist die Wahrscheinlichkeit in der Umgebung von 0° und in der Umgebung von 180° – also entlang der Messrichtung – deutlich erhöht, während sie in der dazu senkrechten Richtung deutlich vermindert ist. Im Fall der Erkenntnisoperationen sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten eben nicht Ausdruck einer invarianten, zugrunde liegenden gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung, sondern ergeben sich aus der gegebenen Verteilung der ontischen Zustände sowie der jeweils für die Erkenntnisoperationen spezifische Art diese Verteilung zu verändern: Die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Erkenntnisoperationen unterscheiden sich von den klassischen dadurch, dass sie zusätzlich noch die je spezifische Art jeder Operation reflektieren, die Verteilung der ontischen Zustände zu transformieren.

Komplementarität und Irreduzibilität der Streuung

Ein klassisches Charakteristikum quantenmechanischer Komplementarität ist die prinzipielle Unmöglichkeit die mit komplementären Erkenntnisoperationen verbundenen Informationsdefizite durch alternative Erkenntnisoperationen oder theoretische Rechnungen zu kompensieren. Es ist zwar in der Quantenmechanik möglich, die Präzision einzelner Erkenntnisoperationen zu erhöhen, aber immer nur um den Preis, dass die Präzision komplementärer Operationen abnimmt: Zwischen komplementären Operationen besteht eine irreduzible Unschärferelation, so dass eine solche Form irreduzibler Unschärfe als Kriterium des Vorliegens genuiner Komplementarität angesehen werden kann – des Vorliegens einer Form der Komplementarität, die der der Quantenmechanik entspricht.

Wie bereits erwähnt und in Abbildung 5b zu sehen, weisen aber nicht nur die Erkenntnisoperationen eine Streuung ihrer Ergebnisse auf, sondern auch die Ergebnisse des klassischen Kategoriensystems, so dass offensichtlich das Vorliegen einer solchen Streuung allein noch nicht als Kriterium komplementärer Zusammenhänge angesehen werden kann. In diesem Abschnitt soll es daher erst einmal darum gehen, die Streuung der Ergebnisse im klassischen Kategoriensystem zu verstehen, um dann zu untersuchen, ob sich die Streuung der Erkenntnisoperationen in fundamentaler Art und Weise davon unterscheidet.

Die gestrichelte rote Funktion in Abbildung 5b zeigt die Streuung bzw. die Standardabweichung $\sigma\{K_\alpha\}_\gamma$ der Ergebnisse der klassischen Kategorie K_α im Zustand $|\gamma\rangle$ als Funktion der Winkeldifferenz $\Delta\measuredangle = \gamma - \alpha$. Betrachtet man zwei Kategorien K_α und K_β die im Zustand $|\gamma\rangle$ angewendet werden, dann ist es (1) möglich, dass K_α streuungsfrei gemessen wird, also für die Streuung $\sigma\{K_\alpha\}_\gamma = 0$ gilt, *oder* dass (2) K_β streuungsfrei gemessen wird, also für die Streuung $\sigma\{K_\beta\}_\gamma = 0$ gilt, nämlich genau dann, wenn entweder (1) $\gamma = \alpha$ oder $\gamma = \alpha + 180^\circ$ oder (2) $\gamma = \beta$ oder $\gamma = \beta + 180^\circ$ ist. Dass *sowohl* K_α *und* K_β streuungsfrei gemessen werden ist aber i.A. nicht möglich, sondern nur in dem trivialen Sonderfall, dass $\alpha = \beta$ bzw. dass $\alpha = \beta + 180^\circ$ gilt. Ist diese Ausnahmebedingung nicht erfüllt, dann gibt es keinen Zustand $|\gamma\rangle$, in dem sowohl die Streuung $\sigma\{K_\alpha\}_\gamma$ als auch die Streuung $\sigma\{K_\beta\}_\gamma$ auf null reduziert werden kann. Dass zwei Messungen an einem Zustand grundsätzlich nicht beide streuungsfrei gemessen werden können, ist der Kern der quantenmechanischen Unschärferelation – nur tritt dieser Effekt hier bereits in einem klassischen Kategoriensystems auf.

Wie eingangs erläutert, sind die klassischen Kategorien über einen kategorialen Bereich K_α definiert, der symmetrisch um die Messrichtung α herum angeordnet ist – siehe Abbildung 1b – und alle ontischen Zustände P_γ umfasst, die in diesem Bereich liegen:

$$P_\gamma \in K_\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma \in \{\alpha - 90^\circ, \alpha + 90^\circ\} \;.$$

Das bedeutet, dass jeder ontischen Zustand $P_\gamma \in K_\alpha$ dem epistemischen Zustand $|\alpha\rangle$ zugeordnet wird, so dass dieser epistemische Zustand mit der Menge aller ontischen Zustände identifiziert werden kann, für die $\gamma \in \{\alpha - 90^\circ, \alpha + 90^\circ\}$ gilt:

$$|\alpha\rangle = \{P_\gamma \,|\alpha - 90^\circ \leq \gamma \leq \alpha + 90^\circ\}$$

Hieraus folgt, dass die Anwendung einer Kategorie K_α im Zustand $|\gamma\rangle$ bedeutet, dass für ein bestimmtes Element aus $|\gamma\rangle$ festgestellt wird, ob es im kategorialen Bereich K_α liegt, was dann der Fall ist, wenn es in der Schnittmenge der kategorialen Bereiche K_α und K_γ liegt, wobei sich dann die bedingten Wahrscheinlichkeiten als relatives Verhältnis dieser Schnittmenge zur Gesamtmenge verstehen lassen – dies ist in Abbildung 7a für die Kategorien K_0 und K_{45} illustriert. Da nur den Elementen der Schnittmenge der beiden kategorialen Bereiche $K_\gamma \cap K_\alpha$ im Zustand $|\gamma\rangle$ der epistemische Zustand $|\alpha\rangle$ zugewiesen wird, kommt es zwangsläufig zu einer Streuung der Ergebnisse, wenn die Schnittmenge $K_\gamma \cap K_\alpha$ nicht entweder leer oder aber mit der Menge $|\gamma\rangle$ identisch ist.

Betrachtet man nun zwei Kategorien K_α und K_β, die in einem Zustand $|\gamma\rangle$ angewendet werden, so folgt analog, dass sich diese zwei Kategorien genau dann simultan streuungsfrei messen lassen, wenn ihre kategorialen Bereiche disjunkt oder identisch sind: Zwei klassische Kategorien K_α und K_γ lassen sich gemeinsam streuungsfrei messen, wenn sie entweder keinen ontischen Zustand gemeinsam erfassen, oder dieselben ontischen Zustände erfassen. Streuungsfreie Kategorien lassen sich demnach nur durch Systeme disjunkter kategorialer Bereiche implementieren, während jede Form der Überschneidung der kategorialen Bereiche zu Unschärfeeffekten führt. Hierbei handelt es sich aber offensichtlich noch nicht um eine quantenmechanische Form der Unschärfe, da sie sich aus einfachen mengentheoretischen Überlegungen ergibt, die auf alle Formen mengenbildender Operationen angewendet werden können und demnach auch im Bereich klassischer Eigenschaften gelten: Im epistemischen Zustand $|Auto\rangle$ ist eben der epistemische Zustand $|Farbe\rangle$ nur unscharf zu bestimmen.

(a)

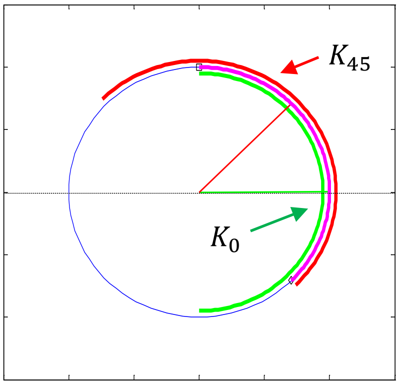

Abbildung 7: (a) Die kategorialen Bereiche K_0 (grün) und K_{45} (rot) sowie der Bereich ihrer Überschneidung $K_0 \cap K_{45}$ (violett), die Interpretation der Punkte auf dem Kreis entspricht Abbildung 1.

Wie bereits angesprochen wurde, ist demnach nicht das Auftreten von Streuungen in der Verwendung von Kategorien das alleinige Charakteristikum genuiner Komplementarität, sondern vielmehr die Unvermeidbarkeit oder Irreduzibilität dieser Streuung. Dementsprechend sind komplementäre Kategorien dadurch ausgezeichnet, dass sich die Mengen der von ihnen erfassten Zustände prinzipiell überschneiden müssen – dass deren Schnittmenge nicht leer sein kann. Da die Streuung der klassischen Kategorien durch die Überschneidung ihrer kategorialen Bereiche bedingt ist, kann diese Streuung dann als reduzibel angesehen werden, wenn es grundsätzlich möglich ist, diese Überschneidung durch eine Veränderung der kategorialen Bereiche zu umgehen – wenn die Überschneidung der kategorialen Bereiche einer willkürlichen Wahl geschuldet ist und durch eine alternative Wahl vermieden werden kann.

Unter einem alternativen System von Kategorien K_α^{alt} ist hier allerdings nicht jede beliebige andere Form einer Klassifikation zu verstehen, sondern eine, die den Zustandsraum der ontischen Zustände in derselben Hinsicht aufteilt wie das System der Kategorien K_α. Dies ist dann der Fall, wenn sich die Kategorien K_α über die alternativen Kategorien K_α^{alt} eindeutig definieren lassen – wenn also die alternativ möglichen Kategorien K_α^{alt} mindestens den Informationsgehalt von K_α aufweisen – wenn die Kategorien K_α^{alt} einer feineren Unterteilung der ontischen Zustände entsprechen, über die sich die durch K_α implementierte Klassifikation eindeutig definieren lässt.

Eine Menge von Kategorien $\mathbb{P}_A = \{K_\alpha \mid \alpha \in A\}$ sei im Folgenden dann als eine Partitionierung[24] des ontischen Zustandsraums bezeichnet, wenn jeder ontische Zustand genau einer der Kategorien K_α zugordnet wird und alle ontischen Zustände von der Menge der Kategorien erfasst werden.

(1) Eine Partitionierung $\mathbb{P}_A$ ist eine vollständige und eindeutige Aufteilung ontischer Zustände in Klassen bzw. eine eindeutige und vollstände Zuordnung von ontischen Zuständen zu epistemischen Zuständen.

Dies ist der Fall, wenn folgende Bedingungen gelten:

(2) Die Kategorien von $\mathbb{P}_A$ sind disjunkt: $\forall\, \alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta: \left(K_\alpha(P_\gamma) = w\right) \;\Rightarrow\; \left(K_\beta(P_\gamma) = f\right)$.

(3) Die Menge $\mathbb{P}_A$ ist vollständig: $\forall\, P_\gamma: \exists K_\alpha \in \mathbb{P}_A: K_\alpha(P_\gamma) = w$.

(4) Die Kategorien einer Partitionierung lassen sich relativ zueinander streuungsfrei messen: Eine Partitionierung ist eine eindeutige, streuungsfreie und vollständige Klassifikation der Zustände eines Gegenstandsbereichs.

Dass Kategorien relativ zueinander unscharf sind, lässt sich unter Verwendung des Konzepts der Partitionierung nun so formulieren, dass sie nicht Kategorien einer Partitionierung sind, und der Sachverhalt, dass die Unschärfe unterschiedlicher Kategorien irreduzibel ist, dass keine informativere Partitionierung existiert, über die sich die fraglichen Kategorien eindeutig definieren bzw. auf die sie sich reduzieren lassen.

Die angegebene Definition von Partitionierungen beruht allerdings auf der exakten Kenntnis aller ontischen Zustände und ihrer Zugehörigkeit zu den entsprechenden Kategorien – sie ist aus einer ontischen Perspektive formuliert.[25] Aus einer epistemischen Perspektive, in der man lediglich über die durch die Erkenntnisakte repräsentierten Informationen verfügt, lassen sich diese Kriterien darüber definieren, dass in jeder Messung in jedem epistemischen Zustand $|\gamma\rangle$ genau für eine Kategorie $K_\alpha = w$ gilt und dass es keine Messung in $|\gamma\rangle$ gibt, in der für alle Kategorien $K_\alpha = f$ gilt. Daraus folgt, dass für die Summe über die Wahrscheinlichkeiten der gesamten Partitionierung $\mathbb{P}_A$ in jedem epistemischen Zustand $|\gamma\rangle$

[24] Die These, dass es sich bei komplementären Verhältnissen um eine Frage der Partitionierung von Zustandsräumen handelt, findet sich in beim Graben (2004) und beim Graben / Atmanspacher (2006).

[25] Da die Kenntnis der ontischen Zustände lediglich eine Fiktion ist, die es in dieser erkenntnistheoretischen Simulation ermöglichen soll, den Effekt von wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen zu studieren, ist es notwendig, die definierenden Kriterien einer Partitionierung auch aus einer rein epistemischen Perspektive zu erfassen, da in einem realistischen Szenario empirischen Bezugs auf eine Umwelt gerade deswegen Erkenntnisbemühungen – also hier Erkenntnisoperationen – vorgenommen werden, weil die ontischen Zustände der Umwelt unbekannt sind. Die Erkenntnisoperationen sind der einzig gangbare Weg, um überhaupt Informationen über die Umwelt zu erlangen: Jede reale Form empirischen Umweltbezugs ist auf eine epistemische Perspektive eingeschränkt – auf eine Perspektive aus der ausschließlich die Resultate von Erkenntnisoperationen zugänglich sind, aber keinerlei davon unabhängige Informationen über die ontischen Zustände vorliegen. Das in diesem Aufsatz diskutierte Modelle ist demnach eine erkenntnistheoretische und keine empirische Simulation, die aus der fiktiven Perspektive eines ‚göttlichen' allwissenden Beobachters den Effekt wechselwirkungsbasierter Erkenntnisoperationen studiert, indem anhand einer Gegenüberstellung einer durch die ontischen Zustände beschriebenen fiktiven Umwelt und ihrer Repräsentation durch die über Erkenntnisoperationen definierten epistemischen Zustände gezeigt wird, dass aus einer rein epistemischen Perspektive – also aus einer Perspektive, die notwendig an eine faktische Wechselwirkung mit der zu repräsentierenden Umwelt gebunden ist – ein prinzipieller, nicht hintergehbarer Informationsmangel besteht, der sich in komplementären Verhältnissen von Erkenntnisoperationen ausdrückt.

$$\sum_{\alpha \in A} p(K_\alpha\,(|\gamma\rangle\,) = \mathrm{w}) = 1$$

gelten muss. Denn gäbe es einen ontischen Zustand P_γ, auf den keine der Kategorien von $\mathbb{P}_A$ zuträfe, dann wäre die Summe < 1,[26] während im Fall, dass die Kategorien nicht disjunkt sind, die Summe $>$ 1 wäre:[27]

(5) Eine Partitionierung unterliegt der Bedingung,[28] dass sich die Wahrscheinlichkeiten des Vorliegens der Kategorien zu 1 summieren müssen: $\sum_{\alpha \in A} p(K_\alpha\,(|\gamma\rangle\,) = \mathrm{w}) = 1$.

Bedingung (2), dass die Kategorien einer Partition disjunkt sein müssen, impliziert, dass die Schnittmengen aller Paare von Kategorien einer Partitionierung leer sind:, $\forall\ \alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta: K_\alpha \cap K_\beta = \emptyset$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, das Vorliegen der Kategorie K_α festzustellen und so den epistemischen Zustand $|\alpha\rangle$ zuzuweisen, wenn der Zustand $|\beta\rangle$ vorliegt, ist über das Verhältnis der Fälle definiert, in denen beide Zustände vorliegen, und der Fälle, in denen nur die Kategorie $K_\beta$vorliegt, $n(\beta)$:

$$p(\alpha|\beta) = \frac{n(\alpha,\beta)}{n(\beta)}.$$

Da $n(\alpha,\beta)$ dem Umfang der Schnittmenge $K_\alpha \cap K_\beta$ entspricht, sind für alle Kategorien einer Partitionierung die bedingten Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens Null, so dass sich die Kategorien einer Partitionierung relativ zueinander streuungsfrei messen lassen.

(6) Die bedingten Wahrscheinlichkeiten des Auftretens von Kategorien einer Partitionierung sind Null: $\forall\ \alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta: p(\alpha|\beta) = 0$.

(7) Die Kategorien einer Partitionierung lassen sich relativ zueinander streuungsfrei messen: Eine Partitionierung ist eine eindeutige, streuungsfreie und vollständige Klassifikation der Zustände eines Gegenstandsbereichs.

Im Modell der Erkenntnisoperationen lässt sich eine solche Partitionierung beispielsweise durch jede Erkenntnisoperation $\widehat{K}_\alpha$ und durch ihre Negation

$$\widehat{K}_\alpha^-(P_\gamma) = w \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{K}(P_\gamma) = f$$

realisieren:

$$\mathbb{P}_\alpha = \{\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\alpha^-\}.$$

---

[26] Sei die Anzahl der jeweils mit $K_\alpha = w$ abgeschlossenen Erkenntnisoperationen n_α und N die Anzahl der durchgeführten Versuche. Wenn N einen Versuch umfasst, in dem ein ontischer Zustand P_0 auftritt, der von keiner der Kategorien erfasst wird, erhöhen sich keine der Anzahlen n_α in diesem Versuch, so dass $\sum n_\alpha < N$ ist. Daher ist dann die Summe über die Wahrscheinlichkeiten $\sum_{\alpha \in A} p(K_\alpha\,(|\gamma\rangle\,) = \mathrm{w}) = \sum_{\alpha \in A} \frac{n_\alpha}{N} < \frac{N}{N} = 1$.

[27] Sei die Anzahl der jeweils mit $K_\alpha = w$ abgeschlossenen Erkenntnisoperationen n_α und N die Anzahl der durchgeführten Versuche. Wenn wenigstens zwei Kategorien, K_α und K_β, nicht disjunkt sind, erhöhen sich für jeden ontischen Zustand, der in der Schnittmenge $K_\alpha \cap K_\beta$ liegt, sowohl die Anzahlen n_α als auch die Anzahl n_β, so dass $\sum n_\alpha > N$ ist. Daher ist dann die Summe über die Wahrscheinlichkeiten $\sum_{\alpha \in A} p(K_\alpha\,(|\gamma\rangle\,) = \mathrm{w}) = \sum_{\alpha \in A} \frac{n_\alpha}{N} > \frac{N}{N} = 1$.

[28] Diese Bedingung ist alleine nicht hinreichend, weil sich die beiden Effekte kompensieren können: Es könnte bei einer unvollständigen *und* nicht-disjunkten Aufteilung auch zu eine Summe von 1 kommen.

Möchte man vor dem Hintergrund, dass das einer solchen Negation zugrunde liegende tertium-non-datur der formalen Logik in komplementären Zusammenhängen möglicherweise problematisch ist, auf eine solche analytische Konstruktion einer Partitionierung verzichten, kann $\mathbb{P}_\alpha$ aus den in dargestellten Ergebnissen der Simulation auch ‚empirisch' bestimmt werden, siehe Abbildung 4a. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für Erkenntnisoperationen, die um 180° verschoben sind, sind immer

$$p\left(|\alpha\rangle\,, |\alpha + 180^\circ\rangle\,\right) = 0,$$

während sie per Konstruktion zusammen den gesamten Bereich der ontischen Zustände abdecken, so dass sich ihre Wahrscheinlichkeiten immer zu 1 addieren müssen, was in der Simulation auch ‚empirisch' bestätigt wird.

Die Frage nach der Reduzierbarkeit der Streuung von Erkenntnisoperationen – also die Frage danach, ob eine Streuung durch eine genuine Form der Komplementarität bedingt ist – lässt sich unter Verwendung des Konzepts der Partitionierung reformulieren: Zwei Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ sind relativ zueinander unscharf, wenn sich wenigstens ein Paar ihrer Kategorien, $K_\alpha \epsilon \mathbb{P}_A$ und $K_\beta \epsilon \mathbb{P}_B$ relativ zueinander nicht streuungsfrei feststellen lassen, d.h. wenn die bedingten Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens $p(\alpha|\beta) \neq 0, 1$ sind – wenn also ihr Auftreten nicht mit Sicherheit auseinander folgt bzw. ausgeschlossen werden kann.

(8) Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ sind relativ zueinander unscharf, wenn es wenigstens ein Paar $K_\alpha \epsilon \mathbb{P}_A$ und $K_\beta \epsilon \mathbb{P}_B$ mit einer bedingten Wahrscheinlichkeit von $p(\alpha|\beta) \neq 0, 1$ gibt.

Zwei Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ sind reduzibel unscharf, wenn sie unscharf sind, aber eine alternative, feinere Partitionierung der ontischen Zustände $\mathbb{P}^*$ existiert, über die sich die ursprünglichen Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ als deterministische Funktion eindeutig definieren lassen. $\mathbb{P}^*$ ist dann informativer und umschließt die Informationen, die durch die Verwendung von $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ erfasst werden, so dass deren Verwendung und die damit verbundene Streuung in diesem Sinne umgehbar und somit reduzierbar ist.

(9) Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ sind reduzibel unscharf, wenn sie unscharf sind und eine Partitionierung $\mathbb{P}^*$ existiert, über die sie sich eindeutig als deterministische Funktion definieren lassen – wenn also $\mathbb{P}_A = F(\mathbb{P}^*\,)$ und $\mathbb{P}_B = G(\mathbb{P}^*\,)$ gilt.

Zwei Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ sind irreduzibel unscharf, wenn sie unscharf sind und keine alternative, feinere Partitionierung der ontischen Zustände $\mathbb{P}^*$ existiert, über die sich die ursprünglichen Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ als deterministische Funktionen definieren lassen. Es existiert dann keine informativere Partitionierung, so dass die Verwendung der unscharfen Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ nicht umgehbar und somit irreduzibel ist. Komplementäre Operatoren der Quantenmechanik sind irreduzibel unscharf, so dass sich diese Eigenschaft als Kriterium des Vorliegens genuiner Komplementarität verwenden lässt.

(10) Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ sind komplementär, wenn sie irreduzibel unscharf sind – d.h. wenn keine feinere Partitionierung $\mathbb{P}^*$ existiert, so dass $\mathbb{P}_A = F(\mathbb{P}^*\,)$ und $\mathbb{P}_B = G(\mathbb{P}^*\,)$ gilt.

Reduzierbarkeit der Streuung im klassischen Kategoriensystem

Der Nachweis der Reduzierbarkeit der Streuung der Operationen hängt demnach mit der Konstruktion einer solche alternativen, feineren Partitionierung zusammen, während der Nachweis eines genuin komplementären Verhältnisses von Partitionierungen über den Nachweis der Unmöglichkeit einer solchen Konstruktion zu erbringen ist. Im Folgenden werden für das klassische Kategoriensystem zwei Varianten einer solchen Konstruktion diskutiert, um einerseits zu zeigen, dass es sich Fall des klassischen Kategoriensystems lediglich um reduzibel unscharfe und somit nicht um komplementäre Partitionierungen handelt, und um dann andererseits zu überprüfen, ob diese Varianten auch im Fall der Erkenntnisoperationen die Konstruktionen einer feineren Partitionierung erlauben.

Die erste dieser Varianten besteht darin, die kategorialen Bereiche der einzelnen Kategorien zu verkleinern, die zweite darin, aus den bestehenden Kategorien durch ihre Kombination – ihre logische Konjunktion – alternative Kategorien zu definieren.

Verfeinerung der kategorialen Bereiche

Seien zwei der klassischen Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ über die folgenden kategorialen Bereiche ihrer Kategorien

$$\mathbb{P}_A = \begin{cases} P_\gamma \in K_\alpha & \Leftrightarrow \quad \alpha - 90^\circ < \gamma < \alpha + 90^\circ \\ P_\gamma \in K_{\alpha+180^\circ} & \Leftrightarrow \quad \alpha + 90^\circ < \gamma < \alpha + 270^\circ \end{cases},$$

$$\mathbb{P}_B = \begin{cases} P_\gamma \in K_\beta & \Leftrightarrow \quad \beta - 90^\circ < \gamma < \beta + 90^\circ \\ P_\gamma \in K_{\beta+180^\circ} & \Leftrightarrow \quad \beta + 90^\circ < \gamma < \beta + 270^\circ \end{cases},$$

gegeben. Dann sind die Schnittmengen der vier kategorialen Bereiche durch

$$P_\gamma \in K_\alpha \cap K_\beta \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha - 90^\circ < \gamma < \alpha + 90^\circ) \wedge (\beta - 90^\circ < \gamma < \beta + 90^\circ),$$

$$P_\gamma \in K_\alpha \cap K_{\beta+180^\circ} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha - 90^\circ < \gamma < \alpha + 90^\circ) \wedge (\beta + 90^\circ < \gamma < \beta + 270^\circ),$$

$$P_\gamma \in K_{\alpha+180^\circ} \cap K_\beta \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha + 90^\circ < \gamma < \alpha + 270^\circ) \wedge (\beta - 90^\circ < \gamma < \beta + 90^\circ),$$

$$P_\gamma \in K_{\alpha+180^\circ} \cap K_{\beta+180^\circ} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha + 90^\circ < \gamma < \alpha + 270^\circ) \wedge (\beta + 90^\circ < \gamma < \beta + 270^\circ),$$

bestimmt. Auf Grund der Rotationssymmetrie und dem Sachverhalt, dass sich für $\alpha + 180°$ oder $\beta + 180°$ dieselben Partitionierungen ergeben, lässt sich ohne Einschränkung der Allgemeinheit die erste Partitionierung durch $\alpha = 0°$ definieren, und die zweite Partitionierung auf einen Bereich von $0° \leq \beta < 180°$ einschränken. Die Schnittmengen ergeben sich dann zu:

$$P_\gamma \in K_\alpha \cap K_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta - 90^\circ < \gamma < 90^\circ,$$

$$P_\gamma \in K_\alpha \cap K_{\beta+180^\circ} \quad \Leftrightarrow \quad 270^\circ < \gamma < \beta + 270^\circ,$$

$$P_\gamma \in K_{\alpha+180^\circ} \cap K_\beta \quad \Leftrightarrow \quad 90^\circ < \gamma < \beta + 90^\circ,$$

$$P_\gamma \in K_{\alpha+180^\circ} \cap K_{\beta+180^\circ} \quad \Leftrightarrow \quad \beta + 90^\circ < \gamma < 270^\circ.$$

Für $\beta = \alpha = 0°$ sind die Schnittmengen $K_\alpha \cap K_\beta$ und $K_{\alpha+180^\circ} \cap K_{\beta+180^\circ}$ mit den kategorialen Bereichen von K_α und K_β identisch und die Schnittmengen $K_\alpha \cap K_{\beta+180^\circ}$ und $K_{\alpha+180^\circ} \cap K_\beta$ leer, während für $\beta = 180°$ die Mengen $K_\alpha \cap K_\beta$ und $K_{\alpha+180^\circ} \cap K_{\beta+180^\circ}$ leer sind, während die Mengen

$K_\alpha \cap K_{\beta+180°}$ und $K_{\alpha+180°} \cap K_\beta$ mit den kategorialen Bereichen von K_α und K_β übereinstimmen. Aus der mengentheoretischen Definition der bedingten Wahrscheinlichkeiten[29]

$$p(\alpha|\beta) = \frac{n\left(K_\alpha \cap K_\beta\right)}{n(K_\beta)}$$

folgen dann für $\beta = 0°$ die in Tabelle 1 dargestellten bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$p(0°\vert\beta), \beta = 0°$	$K_{0°}$	$K_{180°}$	K_β	$K_{\beta+180°}$
$K_{0°}$	1	0	1	0
$K_{180°}$	0	1	0	1
K_β	1	0	1	0
$K_{\beta+180°}$	0	1	0	1

Tabelle 1: Die bedingten Wahrscheinlichkeiten der beiden klassischen Partitionierungen für $\beta = 0°$.

Aus den nicht unterlegten Bereichen der Tabelle folgt, dass die Kategorien jeder der beiden Partitionierungen nach Eigenschaft (5) disjunkt sind, was für diese Partitionierungen per definitionem zu erwarten ist. Die grau unterlegten Bereiche zeigen, dass alle bedingten Wahrscheinlichkeiten der Kategorien beider Partitionierungen entweder 1 oder 0 sind, so dass sie nach Definition (7) relativ zueinander scharf sind – was in diesem Fall auch zu erwarten ist, weil die Partitionierungen für $\beta = 0°$ identisch sind. Eine analoge Argumentation lässt sich für $\beta = 180°$ durchführen. Die Partitionierungen sind demnach für diese beiden Ausrichtungen der Messrichtungen identisch und daher streuungsfrei bzw. scharf.

$p(\alpha\vert\beta), \beta = 90°$	$K_{0°}$	$K_{180°}$	K_β	$K_{\beta+180°}$
$K_{0°}$	1	0	0.5	0.5
$K_{180°}$	0	1	0.5	0.5
K_β	0.5	0.5	1	0
$K_{\beta+180°}$	0.5	0.5	0	1

Tabelle 2: Die bedingten Wahrscheinlichkeiten der beiden klassischen Partitionierungen für $\beta = 90°$.

Abgesehen von diesen beiden Fällen sind die Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ für jede Wahl von β relativ zueinander nur unscharf anwendbar, wie im Folgenden am Beispiel der Wahl von $\beta = 90°$ verdeutlicht werden soll. Eine analoge Argumentation ist für jede andere Wahl von β möglich, so dass in allen folgenden Beispielen pars pro toto mit dem Wert von $\beta = 90°$ gearbeitet wird. In diesem Fall ist

$$P_\gamma \in K_\alpha \cap K_\beta \quad \Leftrightarrow \quad 0^\circ < \gamma < 90^\circ$$

$$P_\gamma \in K_\alpha \cap K_{\beta+180°} \quad \Leftrightarrow \quad 270° < \gamma < 360^\circ$$

$$P_\gamma \in K_{\alpha+180°} \cap K_\beta \quad \Leftrightarrow \quad 90^\circ < \gamma < 180^\circ$$

$$P_\gamma \in K_{\alpha+180°} \cap K_{\beta+180°} \quad \Leftrightarrow \quad 180^\circ < \gamma < 270^\circ$$

Wird der Umfang der Schnittmengen, $n\left(K_\alpha \cap K_\beta\right)$, und der der kategorialen Bereiche, $n\left(K_\beta\right)$, über den abgedeckten Winkelbereich definiert, ergeben sich mit $n\left(K_\beta\right) = 180°$ für alle kategorialen Be-

[29] Der Ausdruck $n(\dots)$ bezeichnet hier den Umfang der jeweiligen Menge.

reiche und $n\big(K_\alpha \cap K_\beta\big) = 90°$ für alle Schnittmengen die in Tabelle 2 dargestellten bedingten Wahrscheinlichkeiten. Dies besagt nach Definition (7), dass die Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ relativ zueinander unscharf sind, weil für mehr als eine bedingte Wahrscheinlichkeit zweier Kategorien der Partitionierungen – in diesem Fall für aller Paare von Kategorien – $p(\alpha|\beta) \neq 0, 1$ gilt.

Es geht nun darum, zu demonstrieren, dass die beiden klassischen Partitionierungen zwar unscharf, nicht aber irreduzibel unscharf sind, was nach Definition (8) dann der Fall ist, wenn (1) eine alternative Partitionierung $\mathbb{P}^*$ existiert, über die sich (2) die Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ eindeutig definieren lassen. Als Kategorien der Partitionierung $\mathbb{P}^*$ werden die Schnittmengen der Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ gewählt:

$$\mathbb{P}^* = \begin{cases} P_\gamma \in K_1 & \Leftrightarrow \quad 0^\circ \leq \gamma < 90^\circ \\ P_\gamma \in K_2 & \Leftrightarrow \quad 90^\circ \leq \gamma < 180^\circ \\ P_\gamma \in K_3 & \Leftrightarrow \quad 180^\circ \leq \gamma < 270^\circ \\ P_\gamma \in K_4 & \Leftrightarrow \quad 270^\circ \leq \gamma < 360^\circ \end{cases} .$$

Die kategorialen Bereiche der vier Kategorien K_1, K_2, K_3 und K_4 sind nun offensichtlich disjunkt und decken den gesamten Zustandsraum ab, so dass $\mathbb{P}^*$ tatsächlich die Definition einer Partitionierung erfüllt, so dass Kriterium (1) der Reduzierbarkeit der Unschärfe erfüllt wird. Zu zeigen bleibt jetzt noch, dass sich die ursprünglichen Kategorien $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ eindeutig aus der Partitionierung $\mathbb{P}^*$ aufbauen lassen. Verwendet man die folgende Definition der Kategorien $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ über Vereinigungsmengen der Kategorien von $\mathbb{P}^*$

$$\mathbb{P}_A = \begin{cases} K_{0^\circ} & = \quad K_1 \cup K_4 \\ K_{180^\circ} & = \quad K_2 \cup K_3 \end{cases} ,$$

$$\mathbb{P}_B = \begin{cases} K_{90^\circ} & = \quad K_1 \cup K_2 \\ K_{270^\circ} & = \quad K_3 \cup K_4 \end{cases} ,$$

werden offensichtlich die Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ aus der Partitionierung $\mathbb{P}^*$aufgebaut, so dass Kriterium (2) der Reduzierbarkeit der Unschärfe ebenfalls erfüllt ist. Die klassischen Kategorien sind nach Definition (8) demnach zwar relativ zu einander unscharf, aber reduzibel unscharf, weil sie sich beide als eindeutige Funktion der informativeren Partitionierung $\mathbb{P}^*$ ausdrücken lassen, so dass ihre Unschärfe lediglich kontingenter Natur ist, aber keineswegs notwendig, unhintergehbar oder irreduzibel: Die klassischen Kategorien sind nicht komplementär.

Kombination von Kategorien

Die zweite Variante, eine Partitionierung $\mathbb{P}^*$zu konstruieren, besteht im Gegensatz zum vorherigen Vorgehen nicht darin, direkt neue Kategorien zu definieren, sondern darin, diese über die logische Kombination der ursprünglichen Kategorien $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ zu definieren. So wie sich aus einer Kategorie *Auto* und *Blau* durch eine logische Konjunktion die Kategorie *blaues Auto* definieren lässt, deren Elemente eben sowohl in die Kategorie *Auto* als auch in die Kategorie *blau* fallen, lasse sich über logische Konjunktionen neue Kategorien

$$\mathbb{P}^* = \begin{cases} K_1 & = \quad K_{0^\circ} \wedge K_{90^\circ} \\ K_2 & = \quad K_{0^\circ} \wedge K_{270^\circ} \\ K_3 & = \quad K_{180^\circ} \wedge K_{90^\circ} \\ K_4 & = \quad K_{180^\circ} \wedge K_{270^\circ} \end{cases}$$

aus den Kategorien der ursprünglichen Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ bestimmen. Im Fall der klassischen Kategorien folgt allerdings aus der Äquivalenz von Aussagenlogik und Mengenlehre, dass sich diese Definitionen als Schnittmengen

$$\mathbb{P}^* = \begin{cases} K_1 = K_{0°} \land K_{90°} = K_{0°} \cap K_{90°} \\ K_2 = K_{0°} \land K_{270°} = K_{0°} \cap K_{270°} \\ K_3 = K_{180°} \land K_{90°} = K_{180°} \cap K_{90°} \\ K_4 = K_{180°} \land K_{270°} = K_{180°} \cap K_{270°} \end{cases}$$

umschreiben lassen, so dass dieser Ansatz im Fall der klassischen Partitionierungen äquivalent mit der bereits diskutierten Definition der Partitionierung $\mathbb{P}^*$ ist.

Streuung der Erkenntnisoperationen

Nachdem gezeigt wurde, dass die klassischen Kategorien des Modellsystems lediglich reduzibel unscharf sind, geht es nun darum zu überprüfen, ob sich die beiden Varianten der Reduktion auf eine feinere Partitionierung auch im Fall der Erkenntnisoperationen anwenden lassen. Eingangs soll dazu – anlog zum Vorgehen im klassischen Fall – überprüft werden, ob die über die Erkenntnisoperationen definierten Partitionierungen

$$\mathbb{P}_A = \begin{cases} \widehat{K}_\alpha \\ \widehat{K}_{\alpha+180^\circ} \end{cases} ,$$

$$\mathbb{P}_B = \begin{cases} \widehat{K}_\beta \\ \widehat{K}_{\beta+180^\circ} \end{cases} ,$$

überhaupt die Definition einer Partitionierung erfüllen. Dies lässt sich in diesem Fall nicht unmittelbar der Definition der kategorialen Bereiche entnehmen, weil die Zuordnung der ontischen Zustände zu einer der Kategorien über die Erkenntnisoperationen erst durch die Dynamik einer faktischen Wechselwirkung realisiert wird. Daher kann dieser Sachverhalt nur ‚empirisch' über ein Simulation getestet werden. Des Weiteren soll in dieser ersten Simulation demonstriert werden, dass $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ unscharf sind, wobei – wie im Fall der klassischen Kategorien – die Simulation pars pro toto für $\alpha = 0°$ und $\beta = 90°$ durchgeführt wird. Die entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten können den in Abbildung 4a dargestellten Simulationsergebnissen über ihre Winkeldifferenz entnommen werden und sind in Tabelle 3 dargestellt.

$p(0°\|\beta), \beta = 90°$	$\widehat{K}_{0°}$	$\widehat{K}_{180°}$	$\widehat{K}_\beta$	$\widehat{K}_{\beta+180°}$
$\widehat{K}_{0°}$	$\Delta\measuredangle = 0°$ → **1**	$\Delta\measuredangle = 180°$ → **0**	$\Delta\measuredangle = 90°$ → **0.5**	$\Delta\measuredangle = 90°$ → **0.5**
$\widehat{K}_{180°}$	$\Delta\measuredangle = 180°$ → **0**	$\Delta\measuredangle = 0°$ → **1**	$\Delta\measuredangle = 90°$ → **0.5**	$\Delta\measuredangle = 90°$ → **0.5**
$\widehat{K}_\beta$	$\Delta\measuredangle = 90°$ → **0.5**	$\Delta\measuredangle = 90°$ → **0.5**	$\Delta\measuredangle = 0°$ → **1**	$\Delta\measuredangle = 180°$ → **0**
$\widehat{K}_{\beta+180°}$	$\Delta\measuredangle = 90°$ → **0.5**	$\Delta\measuredangle = 90°$ → **0.5**	$\Delta\measuredangle = 180°$ → **0**	$\Delta\measuredangle = 0°$ → **1**

Tabelle 3: Die bedingten Wahrscheinlichkeiten der beiden erkenntnisoperationalen Partitionierungen für $\beta = 90°$.

Neben dem hier nicht dargestellten Sachverhalt, dass die Partitionierungen vollständig sind, weil jeder Erkenntnisoperation auch eines der in jede Partitionierungen möglichen Ergebnisse zur Folge hat, lässt sich daraus, dass sich hier dieselben Wahrscheinlichkeiten wie im Fall der klassischen Kategorien ergeben, analog schließen, dass $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$ einerseits tatsächlich Partitionierungen sind und andererseits wegen den von 0 oder 1 abweichenden bedingten Wahrscheinlichkeiten in den grau unterlegten Kästchen relativ zueinander unscharf sind.

Es stellt sich nun die Frage, ob sich die $\mathbb{P}_A$ und $\mathbb{P}_B$, wie im Fall der klassischen Kategorien, auf eine informativere Partitionierung $\mathbb{P}^*$ zurückführen lassen. Dazu soll im Folgenden überprüft werden, ob auch im Fall der Erkenntnisoperationen eine der beiden bereits an klassischen Kategorien diskutierten Varianten erfolgreich ist.

Verfeinerung der kategorialen Bereiche

Die Verfeinerung der kategorialen Bereiche lässt sich im Fall der Erkenntnisoperationen auf zwei unterschiedliche Weisen durchführen. Zum einen ist es möglich, jede Kategorie der feineren Partitionierung $\mathbb{P}^*$ durch eine eigene Erkenntnisoperation zu definieren, zum anderen kann man eine Erkenntnisoperation konstruieren, die alle Kategorien von $\mathbb{P}^*$ definiert.

Die erste Variante lässt sich realisieren, indem man die wechselwirkungsbasierte Definition der Zugehörigkeit zu den erkenntnisoperationalen Kategorien $\widehat{K}_\alpha$ über die Bedingung

$$P_\gamma \in \widehat{K}_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{F}_{pa}| > |\vec{F}_{pb}|,$$

$$P_\gamma \notin \widehat{K}_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{F}_{pa}| \leq |\vec{F}_{pb}|,$$

so modifiziert, dass die kategorialen Bereiche nicht mehr einen Bereich von 180° mit der Messrichtung α im Zentrum abdecken – siehe Abbildung 1b –, sondern nur einen Bereich von 90°, so dass 4 solcher Kategorien benötigt werden, um alle ontischen Zustände klassifizieren zu können. Dies lässt sich dadurch erreichen, dass in die Ungleichung der Klassifikationsbedingung ein entsprechender Faktor integriert wird. Diese modifizierten Erkenntnisoperationen seien als $\widehat{V}_\alpha$ bezeichnet, und sind in der Hinsicht mit den Operationen $\widehat{K}_\alpha$ identisch, als sie auf derselben Wechselwirkung beruhen und somit denselben Effekt auf die ontischen Zustände haben, während sie sich darin unterscheiden, dass ihre kategorialen Bereiche auf die Hälfte reduziert sind – also einen Bereich von 90° umspannen, in dessen Zentrum die Messrichtung α liegt. Um dieselbe Partitionierung wie im Beispiel der klassischen Kategorien zu erzielen, muss $\mathbb{P}^*$demnach folgendermaßen über die Operationen $\widehat{V}_\alpha$ definiert werden:

$$\mathbb{P}^* = \begin{cases} P_\gamma \in \widehat{V}_{45^\circ} & \Leftrightarrow \quad 0^\circ \leq \delta(\gamma) < 90^\circ \\ P_\gamma \in \widehat{V}_{135^\circ} & \Leftrightarrow \quad 90^\circ \leq \delta(\gamma) < 180^\circ \\ P_\gamma \in \widehat{V}_{225^\circ} & \Leftrightarrow \quad 180^\circ \leq \delta(\gamma) < 270^\circ \\ P_\gamma \in \widehat{V}_{315^\circ} & \Leftrightarrow \quad 270^\circ \leq \delta(\gamma) < 360^\circ \end{cases}.$$

Durch die Wechselwirkung der Erkenntnisoperationen wird jeder ontische Zustand P_γ auf einen Folgezustand P_δ abgebildet – diese Abbildung ist in Abbildung 3b für alle Werte des Winkels γ dargestellt. Dieser durch den Winkel $\delta(\gamma)$ bestimmte Folgezustand wird über die Klassifikationsbedingung zur Klassifikation der ontischen Zustände herangezogen.[30] Um gemäß der Definition der Reduzierbarkeit von Streuungen klären zu können, ob sich die relative Streuung der Erkenntnisoperationen

$$\mathbb{P}_A = \begin{cases} \widehat{K}_\alpha \\ \widehat{K}_{\alpha+180^\circ} \end{cases},$$

[30] Es wird also angenommen, dass die Wechselwirkung erst eine endliche Zeitspanne bestehen muss, bevor eine Klassifikation aufgrund der Kraftverhältnisse möglich ist. Vgl. Kralemann (2010), S. 8-10.

$$\mathbb{P}_B = \begin{cases} \widehat{K}_\beta \\ \widehat{K}_{\beta+180^\circ} \end{cases} ,$$

durch die Verwendung von $\mathbb{P}^*$reduzieren lässt, muss geklärt werden, ob $\mathbb{P}^*$überhaupt die Definition einer Partitionierung erfüllt. Dass die Klassifikation vollständig ist, kann aufgrund der Definition der Kategorien erst einmal angenommen werden, so dass sich die Klärung des ersten Aspekts auf die Frage konzentrieren kann, ob die vier Erkenntnisoperationen $\hat{V}_{45^\circ}$, $\hat{V}_{135^\circ}$, $\hat{V}_{225^\circ}$ und $\hat{V}_{315^\circ}$ disjunkt sind – d.h. ob für ihre bedingten Wahrscheinlichkeiten gemäß Kriterium (6) $p(\alpha|\beta) = 0$ gilt.

Um festzustellen, ob dies der Fall ist, werden in einer Simulation mit 500.000 im Bereich von $0°, \dots, 360°$ gleich verteilten ontischen Zuständen die Operationen $\hat{V}_\alpha^I$ durchgeführt und diesen Zuständen so die epistemischen Zustände $|45°\rangle^I$, $|135°\rangle^I$, $|225°\rangle^I$, $|315°\rangle^I$ zugewiesen. In diesen epistemischen Zuständen werden dieselben Operationen $\hat{V}_\alpha^{II}$ auf die sich ergebenden ontischen Zustände erneut durchgeführt, um die Zustände $|45°\rangle^{II}$, $|135°\rangle^{II}$, $|225°\rangle^{II}$, $|315°\rangle^{II}$ zuzuweisen. So lassen sich die Häufigkeit des gemeinsamen Auftretens von Resultaten $n(\alpha^I, \alpha^{II})$ bestimmen: $n(\alpha^{II}, \alpha^I)$ ist die Anzahl derjenigen Versuche, in denen zuerst der Zustand $|\alpha\rangle^I$ und anschließend der Zustand $|\alpha\rangle^{II}$ festgestellt wurde. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten, dass unter der Bedingung der Gegebenheit von $|45°\rangle^I$, $|135°\rangle^I$, $|225°\rangle^I$, $|315°\rangle^I$ durch die Erkenntnisoperationen $\hat{V}_{45^\circ}$, $\hat{V}_{135^\circ}$, $\hat{V}_{225^\circ}$ und $\hat{V}_{315^\circ}$ die epistemischen Zustände $|45°\rangle^{II}$, $|135°\rangle^{II}$, $|225°\rangle^{II}$, $|315°\rangle^{II}$ festgestellt werden, ergeben sich dann aus der Simulation gemäß

$$p(\alpha^{II}|\alpha^I) = \frac{n(\alpha^{II}, \alpha^I)}{n(\alpha^I)}$$

und sind in Tabelle 4 dargestellt. In Klammern befinden sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten, die sich unter identischen Bedingungen aber ohne den Effekt der Wechselwirkung – also in einem entsprechenden klassischen Kategoriensystem – ergäben. Die Abweichungen zwischen den Erkenntnisoperationen $\hat{V}_\alpha$ und dem klassischen Pendant sind grau unterlegt.

$p(\alpha^{II}\|\alpha^I)$	$\|45°\rangle^{II}$	$\|135°\rangle^{II}$	$\|225°\rangle^{II}$	$\|315°\rangle^{II}$
$\|45°\rangle^I$	1 (1)	0.16 (0)	0 (0)	0.16 (0)
$\|135°\rangle^I$	0.16 (0)	1 (1)	0.16 (0)	0 (0)
$\|225°\rangle^I$	0 (0)	0.16 (0)	1 (1)	0.16 (0)
$\|315°\rangle^I$	0.16 (0)	0	0.16 (0)	1 (1)

Tabelle 4: Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(\alpha|\beta)$ der Erkenntnisoperationen $\hat{V}_\alpha$: In Klammern stehen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, die sich ergeben, wenn die Effekte der Wechselwirkung nicht beachtet werden. Die Abweichungen der Erkenntnisoperationen von diesem klassisch zu erwartenden Ergebnis sind grau unterlegt.

Wie diese grau unterlegten Bereiche zeigen, gibt es – im Gegensatz zum klassischen Pendant – eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit, Zustände, die einem kategorialen Bereich zugeordnet wurden, in einer folgenden Erkenntnisoperation in einem der benachbarten kategorialen Bereiche nachzuweisen – die durch die Erkenntnisoperationen definierten epistemischen Zustände ‚tunneln' in die ‚klassisch verbotenen' Bereiche hinein. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten erfüllen damit offensichtlich nicht Kriterium (6) der Definition einer Partitionierung: Die Kategorien dieser Variante von $\mathbb{P}^*$ sind nicht disjunkt, so dass es sich hier nicht um eine Partitionierung handelt. Die erste Variante, die unscharfen Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_\alpha$ und $\widehat{K}_\beta$ analog dem Vorgehen im klassischen Fall als deterministische Funktionen einer gemeinsamen Partitionierung $\mathbb{P}^*$ zu rekonstruieren, scheitert demnach daran, dass der Effekt der Erkenntnisoperationen auf die zu repräsentierenden ontischen Zustände eine dem klassischen Beispiel entsprechende feinere, disjunkte Grenzziehung im Zustandsraum der ontischen Zustände unmöglich macht.

Um die zweite Variante zu realisieren – also um *eine* Erkenntnisoperation zu konstruieren, die *alle* Kategorien von $\mathbb{P}^*$ definiert – bietet es sich an, die Erkenntnisoperation so zu modifizieren, dass durch eine Operation den ontischen Zuständen 4 unterschiedliche epistemische Zustände zugewiesen werden können, indem das Kriterium der Zuweisung geändert wird. Der Definition der Erkenntnisoperationen nach wird die Zuweisung der ontischen Zustände über das Verhältnis der Kräfte auf die beiden Ladungen durch

$$P_\gamma \in \widehat{K}_\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\vec{F}_{pa}\right| > \left|\vec{F}_{pb}\right|,$$

$$P_\gamma \notin \widehat{K}_\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\vec{F}_{pa}\right| \leq \left|\vec{F}_{pb}\right|,$$

bestimmt – siehe Abbildung 2a. Diese Definition impliziert, dass alle ontischen Zustände in einem Halbkreis um die jeweilige Messrichtung der Kategorie $\widehat{K}_\alpha$ zugewiesen werden. Diese Bedingung lässt sich durch Faktoren in der Ungleichung und durch die Beachtung der Richtung der Kraft so modifizieren, dass eine Operation entsteht, die 4 mögliche Ergebnisse unterscheiden kann, nichtsdestotrotz aber immer noch auf derselben Wechselwirkung mit demselben Effekt auf die ontischen Zustände basiert wie die ursprüngliche Operation. Es handelt sich demnach um einen Ansatz, auf der Basis der Erkenntnisoperationen, dieselben kategorialen Bereiche zu implementieren, die im klassischen Beispiel erfolgreich waren und die auch der ersten erkenntnisoperationalen Variante zugrunde gelegen haben, nur dass in diesem Fall die Zuweisung von 4 unterschiedlichen Ergebnissen bzw. die Unterscheidung von 4 unterschiedlichen epistemischen Zuständen durch eine einzige Operation geleistet wird.

Die für die folgende Simulation verwendete Operation basiert auf der Erkenntnisoperation $\widehat{K}_{0°}$ – die Ladungen sind also in Richtung 0° ausgerichtet – und wird daher als $\widehat{M}_{0°}$ bezeichnet. Die Modifikation der Zuweisungsbedingung sei nun so gewählt, dass für die Ergebnisse der Operation[31]

$$\widehat{M}_{0°} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \quad P_\gamma,\ 0° \leq \delta(\gamma) < 90° \\ 2 & \Leftrightarrow \quad P_\gamma,\ 90° \leq \delta(\gamma) < 180° \\ 3 & \Leftrightarrow \quad P_\gamma,\ 180° \leq \delta(\gamma) < 270° \\ 2 & \Leftrightarrow \quad P_\gamma,\ 270° \leq \delta(\gamma) < 360° \end{cases}$$

gilt. D.h. je nach Ergebnis der Operation werden die epistemischen Zustände $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle$ zugewiesen.

Wie im ersten Fall stellt sich nun die Frage, ob es sich bei der Erkenntnisoperation $\widehat{M}_{0°}$ um eine Partitionierung handelt. Um festzustellen, ob dies der Fall ist, wird – analog zum ersten Beispiel – in einer Simulation mit 500.000 im Bereich von $0°, \dots, 360°$ gleich verteilten ontischen Zuständen zuerst die Operation $\widehat{M}^I_{0°}$ mit den Resultaten

$$m^I = 1,2,3,4$$

[31] Die Winkel $\delta(\gamma)$ sind wie im ersten Beispiel die durch die Wechselwirkung erzeugten Winkel der ontischen Zustände P_δ, die sich durch den Effekt der Erkenntnisoperationen aus den ontischen Zuständen P_γ vor der Wechselwirkung ergeben.

durchgeführt, um dann anschließend auf die sich daraus ergebenden ontischen Zustände die Erkenntnisoperationen $\widehat{M}_{0^\circ}^{II}$ mit den Resultaten

$$m^{II} = 1,2,3,4$$

anzuwenden. Über die Anzahl der Ergebnisse $n(m^I)$ und $n(m^{II}, m^I)$ werden wieder die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$p(m^{II}|m^I) = \frac{n(m^{II}, m^I)}{n(m^I)}$$

bestimmt – sie sind in Tabelle 5 dargestellt.

$p(m^{II}\|m^I)$	$\|1\rangle^{II}$	$\|2\rangle^{II}$	$\|3\rangle^{II}$	$\|4\rangle^{II}$
$\|1\rangle^I$	0.5 (1)	0 (0)	0 (0)	0.5 (0)
$\|2\rangle^I$	0 (0)	0.5 (1)	0.5 (0)	0.0 (0)
$\|3\rangle^I$	0 (0)	0.5 (0)	0.5 (1)	0 (0)
$\|4\rangle^I$	0.5 (0)	0 (0)	0 (0)	0.5 (1)

Tabelle 5: Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(m^{II}|m^I)$, dass unter der Bedingung der Gegebenheit der epistemischen Zustände $|1\rangle^I$, $|2\rangle^I$, $|3\rangle^I$, $|4\rangle^I$ durch eine folgende Erkenntnisoperation $\widehat{M}_{0^\circ}$ die epistemischen Zustände $|1\rangle^{II}$, $|2\rangle^{II}$, $|3\rangle^{II}$, $|4\rangle^{II}$ festgestellt werden. In Klammern stehen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, die sich ergeben, wenn die Effekte der Wechselwirkung nicht beachtet werden. Die Abweichungen der Erkenntnisoperationen von diesem klassisch zu erwartenden Ergebnis sind grau unterlegt.

Wie die grau unterlegten Bereiche zeigen, gibt es – wieder im Gegensatz zum klassischen Pendant – eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit, Zustände, die einem kategorialen Bereich zugeordnet wurden, in der folgenden Erkenntnisoperation in jeweils einem der benachbarten kategorialen Bereiche nachzuweisen. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(m^{II}|m^I)$ erfüllen auch hier nicht Kriterium (6) der Definition einer Partitionierung: Die Kategorien von $\widehat{M}_{0^\circ}$ sind nicht disjunkt, so dass es sich hier nicht um eine Partitionierung handelt. Dies hat seine Ursache auch in diesem Fall darin, dass der Effekt der Erkenntnisoperationen auf die zu repräsentierenden ontischen Zustände keine feinere, disjunkte Grenzziehung im Zustandsraum der ontischen Zustände ermöglicht.

Wie diese beiden Beispiele zeigen, ist es – im Gegensatz zum klassischen Beispiel – nicht ohne weiteres möglich, über die auf einer faktischen Wechselwirkung beruhenden Erkenntnisoperationen eine feinere Partition des Zustandsraums der ontischen Zustände zu definieren, indem die Zuweisungsbedingung der kategorialen Bereiche schärfer gefasst wird. Im nächsten Abschnitt wird dem Vorgehen im klassischen Beispiel entsprechend der Frage nachgegangen, ob dies durch die logische Kombination der Erkenntnisoperationen möglich ist.

Kombination von Kategorien

Durch die beiden relativ zueinander unscharfen Partitionierungen

$$\mathbb{P}_A = \begin{cases} \widehat{K}_{0^\circ} \\ \widehat{K}_{180^\circ} \end{cases},$$

$$\mathbb{P}_B = \begin{cases} \widehat{K}_{90^\circ} \\ \widehat{K}_{270^\circ} \end{cases},$$

mit den zwei jeweils möglichen Ergebnissen

$$a = \{-1{,}1\}, \quad b = \{-1{,}1\}$$

wird entsprechend dem Vorgehen im klassischen Beispiel durch eine logische Konjunktion der Ergebnisse die folgende Menge von Erkenntnisoperationen definiert:

$$\mathbb{P}^* = \begin{cases} \widehat{K}_1 = \widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{90°} = w & \Leftrightarrow \quad a = 1 \wedge b = 1 \\ \widehat{K}_2 = \widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{270°} = w & \Leftrightarrow \quad a = 1 \wedge b = -1 \\ \widehat{K}_3 = \widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{90°} = w & \Leftrightarrow \quad a = -1 \wedge b = 1 \\ \widehat{K}_4 = \widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{270°} = w & \Leftrightarrow \quad a = -1 \wedge b = -1 \end{cases}.$$

Wie in den ersten beiden Varianten stellt sich nun die Frage, ob es sich bei der Erkenntnisoperation $\mathbb{P}^*$ um eine Partitionierung handelt. Um festzustellen, ob dies der Fall ist, wird – analog zu den ersten Beispielen – in einer Simulation mit 500.000 im Bereich von 0°, … ,360° gleich verteilten ontischen Zuständen zuerst die 4 kombinatorischen Operationen

$$\left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{90°}\right)^I, \left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^I, \left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^I, \left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^I$$

durchgeführt, um dann anschließend auf die sich daraus ergebenden ontischen Zustände erneut die Erkenntnisoperationen

$$\left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{90°}\right)^{II}, \left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^{II}, \left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^{II}, \left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^{II}$$

anzuwenden. Über die Anzahl der positiven Ergebnisse aus der ersten und zweiten Durchführung $n(I)$ und $n(II, I)$ werden wieder die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$p(II|I) = \frac{n(II, I)}{n(I)}$$

bestimmt, dass die unterschiedlichen kombinatorischen Erkenntnisoperationen einen positiven Ausgang zeitigen, wenn vorher eine der 4 anderen kombinatorischen Operationen ein positives Ergebnis geliefert hat. Diese bedingten Wahrscheinlichkeiten sind in Tabelle 6 dargestellt.

$p(II\|I)$	$\left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{90°}\right)^{II}$	$\left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^{II}$	$\left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{90°}\right)^{II}$	$\left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^{II}$
$\left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{90°}\right)^I$	0.23 (1)	0.26 (0)	0.27 (0)	0.24 (0)
$\left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^I$	0.27 (0)	0.23 (1)	0.24 (0)	0.26 (0)
$\left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{90°}\right)^I$	0.26 (0)	0.24 (0)	0.23 (1)	0.26 (0)
$\left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^I$	0.24 (0)	0.27 (0)	0.26 (0)	0.23 (1)

Tabelle 6: Die bedingten Wahrscheinlichkeiten p(II|I), dass nach einer Anwendung der kombinierten Operatoren $\left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{90°}\right)^I$, $\left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^I$, $\left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^I$, $\left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^I$ mit positivem Ergebnis, eine erneute Anwendung der kombinierten Operatoren $\left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{90°}\right)^{II}$, $\left(\widehat{K}_{0°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^{II}$, $\left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^{II}$, $\left(\widehat{K}_{180°} \wedge \widehat{K}_{270°}\right)^{II}$ ebenfalls zu einem positiven Ergebnis führt. In Klammern stehen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, die sich ergeben, wenn die Effekte der Wechselwirkung nicht beachtet werden. Die Abweichungen der Erkenntnisoperationen von diesem klassisch zu erwartenden Ergebnis sind grau unterlegt.

Wie die grau unterlegten Bereiche zeigen, gibt es – wieder im Gegensatz zum klassischen Pendant – eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit, Zustände, die einem der durch die Kombination der Erkenntnisoperationen definierten epistemischen Zustand zugeordnet wurden, in den über andere Kombinationen definierten Kategorien nachzuweisen – in diesem Beispiel sogar in allen mit nahezu gleicher Wahrscheinlichkeit. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(II|I)$ erfüllen also auch hier nicht

Kriterium (6) der Definition einer Partitionierung: Die über die Kombination der Erkenntnisoperationen definierten Kategorien von $\mathbb{P}^*$ sind nicht disjunkt, so dass es sich auch hier nicht um eine Partitionierung handelt. Dies hat seine Ursache auch in diesem Fall darin, dass der Effekt der Erkenntnisoperationen auf die zu repräsentierenden ontischen Zustände keine feinere, disjunkte Grenzziehung im Zustandsraum der ontischen Zustände ermöglicht.

Kriterien der Möglichkeit von Partitionierungen

Die Beispiele der vorangehenden Abschnitte haben gezeigt, dass es – im Gegensatz zum klassischen Kategoriensystem – auf der Basis der wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen nicht möglich ist, eine feinere Partitionierung der ontischen Zustände zu induzieren, durch die die beiden relativ zueinander unscharfen Partitionierungen

$$\mathbb{P}_A = \begin{cases} \widehat{K}_{0^\circ} \\ \widehat{K}_{180^\circ} \end{cases},$$

$$\mathbb{P}_B = \begin{cases} \widehat{K}_{90^\circ} \\ \widehat{K}_{270^\circ} \end{cases},$$

eindeutig definiert werden könnten. Während die klassischen Kategorien demnach lediglich reduzibel unscharf sind, nähren diese Ergebnisse den Verdacht, dass die Unschärfe der Erkenntnisoperationen irreduzibel ist und diese somit als genuin komplementär anzusehen sind. Diese Form des exemplarischen Vorgehens reicht natürlich nicht aus, um Kriterium (10) komplementärer Partitionierungen zu erfüllen, weil dort die *grundsätzliche* Unmöglichkeit der Existenz einer feineren Partitionierung gefordert ist, während hier nur für einzelne mögliche Ansätze der Definition einer solchen Partitionierung exemplarisch gezeigt wurde, dass sie nicht die Bedingungen einer Partitionierung erfüllen. Es besteht demnach immer noch die Möglichkeit, dass ein bisher nicht überprüfter Ansatz doch Kriterium (10) erfüllt. Dieses Kriterium ist offensichtlich so formuliert, dass es aufgrund dieses Induktionsproblems durch eine Analyse einzelner Ansätze grundsätzlich nicht zufriedenstellend erfüllt werden kann. Die bisherigen Ergebnisse lassen sich demnach lediglich als Hinweis darauf deuten, dass die Erkenntnisoperationen genuin komplementär sind, nicht aber als Beweis.

Andererseits lassen sie sich als Heuristik verwenden, um eine solche Beweisführung zu konstruieren. Als Ausgangspunkt dieses Gedankenganges lässt sich die Frage verwenden, warum zwar alle Erkenntnisoperationen der Form

$$\mathbb{P}_A = \begin{cases} \widehat{K}_{\alpha} \\ \widehat{K}_{\alpha+180^\circ} \end{cases}$$

Kriterium (6) einer Partitionierung erfüllen, nicht aber die drei diskutierten Varianten, eine feinere Partitionierung als $\mathbb{P}_A$ zu definieren.

Da der entscheidende Unterschied zwischen den klassischen Kategorien und den Erkenntnisoperationen offensichtlich die Rückwirkung der Erkenntnisoperationen auf die ontischen Zustände ist, ist es naheliegend, die Ursache, warum $\mathbb{P}_A$ Kriterium (6) von Partitionierungen erfüllt, nicht aber die Varianten der Verfeinerung, in der Art und Weise zu suchen, wie diese Rückwirkung die Klassifikation der ontischen Zustände beeinflusst. Zu diesem Zweck werden im ersten Abschnitt dieses Kapitels die über die Operationen definierten kategorialen Bereiche – also die Menge der ontischen Zustände P_γ, die durch eine Operation als der entsprechenden Kategorie zugehörig eingestuft werden – mit den sich aus der Rückwirkung der Operation ergebenden ontischen Zuständen P_δ verglichen, um aus diesem Vergleich die Gründe zu ermitteln, warum es nicht möglich ist, durch die diskutierten Varianten Partitionierungen zu definieren. Im anschließenden zweiten Abschnitt werden dann im Ausgang von diesen Analysen allgemeine Kriterien für die Möglichkeit der Konstruktion von Partitionierungen zusammengefasst.

Kategoriale Bereiche und Mengen von Folgezuständen

Wie bereits erwähnt, ist es das Ziel der folgenden Ausführungen an den diskutierten Beispielen zu studieren, warum die Versuche der Konstruktion von feineren Partitionierungen durch Erkenntnisoperationen erfolglos geblieben sind, während die ursprünglichen Partitionierungen $\mathbb{P}_A$ die Kriterien einer Partitionierung erfüllen.

(a) (b)

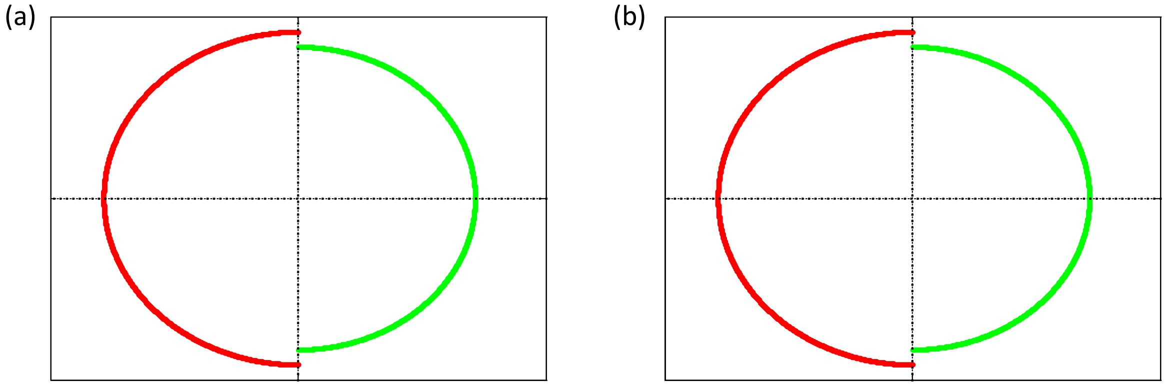

Abbildung 8: (a) Die durch die Partition $\mathbb{P}_A$ mit den Erkenntnisoperationen $\hat{K}_\alpha$ und $\hat{K}_{\alpha+180^\circ}$ für $\alpha = 0°$ induzierte Klassifikation der ontischen Zustände P_γ. Die Interpretation der Punkte auf dem Kreis entspricht Abbildung 1: Die Operation $\hat{K}_\alpha$ erfasst alle grünen Punkte auf dem Kreis, die Operation $\hat{K}_{\alpha+180^\circ}$ alle roten Punkte des Kreises. (b) Die Verteilung der sich aus den ontischen Zuständen P_γ durch die Wirkung der Erkenntnisoperationen ergebenden ontischen Zustände P_δ. Der Vergleich zeigt, wie die kategorialen Bereiche der Operationen (a) durch die Rückwirkung der Operation abgebildet werden (b).

In Abbildung 8a sind die kategorialen Bereich der beiden Erkenntnisoperationen $\hat{K}_\alpha$ und $\hat{K}_{\alpha+180^\circ}$, die die Partitionierung $\mathbb{P}_A$ definieren, für $\alpha = 0°$ farbig dargestellt – diejenigen ontischen Zustände P_γ auf dem Kreis, die durch ein positives Resultat der Operation $\hat{K}_\alpha$ erfasst werden, sind grün, diejenigen, die durch ein positives Resultat von $\hat{K}_{\alpha+180^\circ}$ erfasst werden, sind rot dargestellt. Wie sich dieser Darstellung der beiden kategorialen Bereiche entnehmen lässt, ist diese Klassifikation – wie bereits diskutiert – sowohl vollständig als auch disjunkt. Während in Abbildung 8a die ursprünglichen ontischen Zustände P_γ vor dem Effekt der Wechselwirkung abgebildet sind, sind in Abbildung 8b die sich jeweils ergebenden ontischen Zustände nach den Operationen P_δ zu sehen: (a) zeigt, welche Zustände durch welche Operation klassifiziert werden, und (b), was aus diesen so klassifizierten Zuständen durch den Effekt der Operation wird: $P_\gamma \to P_\delta$. Der Vergleich von (a) und (b) zeigt, dass die Menge der ontischen Zustände, die jeweils durch eine der beiden Operationen erfasst werden, und die Menge der Zustände, auf die sie durch die Operation abgebildet werden, jeweils identisch ist. Jeder ontische Zustand wird durch die Operation auf die Menge der Zustände abgebildet, die seiner eigenen Klassifikation entsprechen.

Dies ist allerdings nicht so aufzufassen, dass die ontischen Zustände nicht durch die Wechselwirkung der Erkenntnisoperationen verändert würden. Vielmehr wird jeder ontische Zustand auf einen Folgezustand $P_\gamma \to P_\delta$ abgebildet – nur führt diese Abbildung nicht aus den kategorialen Bereichen hinaus:

Die rot markierten Zustände werden wieder auf rot markierte Zustände und die grün markierten Zustände wieder auf grün markierte Zustände abgebildet. Die so definierten kategorialen Bereiche – die grün und rot symbolisierten Mengen von Zuständen – sind invariant unter der durch die Erkenntnisoperationen induzierten Dynamik. Dieser Sachverhalt erklärt ihre in Tabelle 3 dargestellten bedingten Wahrscheinlichkeiten: Weil kein ontischer Zustand trotz des Effekts der Wechselwirkung die kategorialen Bereiche verlassen kann, gilt

$$p(0°|0°) = \; p(180°|180°) = 1,$$

und weil kein ontischer Zustand in den jeweils anderen kategorialen Bereich hinein wechseln kann, gilt

$$p(0°|180°) = \; p(0°|180°) = 0.$$

Die kategorialen Bereiche sind demnach so gewählt, dass sie relativ zur der durch die Operationen induzierten Dynamik invariante Mengen ontischer Zustände definieren.

In Abbildung 9a sind die durch die vier Operationen $\hat{V}_{45°}$, $\hat{V}_{135°}$, $\hat{V}_{225°}$ und $\hat{V}_{315°}$ implementierten kategorialen Bereiche dargestellt, die die Klassifikation der gegebenen ontischen Zustände P_γ repräsentieren, in Abbildung 9b, die den Zuständen in (a) entsprechenden ontischen Zustände P_δ nach Wechselwirkung: Im Gegensatz zu den eingangs diskutierten Erkenntnisoperationen $\hat{K}_\alpha$ und $\hat{K}_{\alpha+180^\circ}$ sind die jeweils farbig markierten Mengen nicht identisch. Die durch die Wechselwirkung erzeugte Menge (b) liegt in diesem Fall zwar immer im jeweils entsprechenden kategorialen Bereich, was die in Tabelle 4 auf der Diagonalen befindlichen Werte von

$$p(\alpha|\alpha) = 1$$

erklärt,

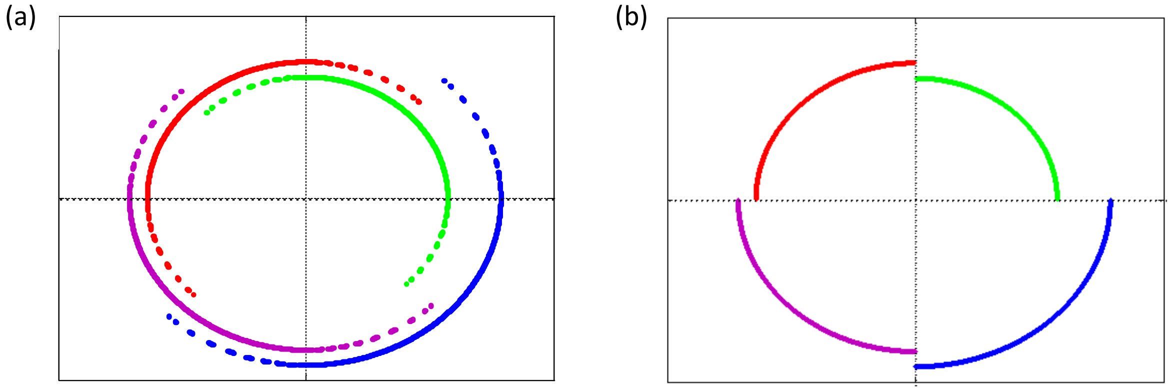

Abbildung 9: (a) Die durch die Erkenntnisoperationen $\hat{V}_\alpha$ induzierte Klassifikation der ontischen Zustände P_γ, die Interpretation der Punkte auf dem Kreis entspricht Abbildung 1: Der epistemische Zustand $|45°\rangle$ umfasst die grün dargestellten ontischen Zustände, $|135°\rangle$ die rot dargestellten, $|225°\rangle$ die violett dargestellten und $|315°\rangle$ die blau dargestellten. (b) Die Verteilung der sich aus den ontischen Zuständen P_γ durch die Wirkung der Erkenntnisoperationen ergebenden ontischen Zustände P_δ – diese Verteilung spiegelt die Klassifikationsbedingungen dieser Erkenntnisoperationen wider. Der Vergleich zeigt, wie die kategorialen Bereiche der Operationen (a) durch die Rückwirkung der Operation abgebildet werden (b).

die kategorialen Bereiche und die Menge der durch die jeweils anderen Operationen erzeugten Zustände sind aber nicht disjunkt, sondern weisen eine Überlappung mit den beiden jeweils benachbarten kategorialen Bereichen auf, was zu den grau unterlegten Wahrscheinlichkeiten in Tabelle 4 von

$$p_{Nachbar} = 0.16$$

führt. Bezeichnet man die in Abbildung 9a farbig dargestellten Mengen ontischer Zustände P_γ – die kategorialen Bereiche der vier Operationen $\hat{V}_{45°}$, $\hat{V}_{135°}$, $\hat{V}_{225°}$ und $\hat{V}_{315°}$ – als $\mathbb{K}_\alpha$ und die in Abbildung 9a dargestellten Mengen der entsprechenden ontischen Folgezustände P_δ als $\mathbb{V}_\alpha$, dann lässt sich einerseits konstatieren, dass in diesem Fall die Erkenntnisoperationen nicht aus den kategorialen Bereichen $\mathbb{K}_\alpha$ herausführen, weil die Menge $\mathbb{V}_\alpha$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{K}_\alpha$ ist, so dass jedes Element aus $\mathbb{K}_\alpha$ wieder auf ein Element aus $\mathbb{K}_\alpha$ abgebildet wird. Anderseits muss aber – und hier ist die entscheidende Differenz zu den Erkenntnisoperationen $\hat{K}_\alpha$ und $\hat{K}_{\alpha+180°}$ – festgestellt werden, dass $\mathbb{K}_\alpha$ keine *minimale* invariante Menge ist und somit mehr Elemente enthält als für die Invarianz notwendig wären, so dass $\mathbb{K}_\alpha$ Elemente enthält, die selbst nicht wieder durch die Dynamik aus $\mathbb{K}_\alpha$ erzeugt werden können.

Genau in den Bereichen dieser Elemente aber überschneiden sich die kategorialen Bereiche in Abbildung 9a, was zu den nicht verschwindenden Restwahrscheinlichkeiten führt und somit dazu, dass es sich bei den Operationen $\hat{V}_{45°}$, $\hat{V}_{135°}$, $\hat{V}_{225°}$ und $\hat{V}_{315°}$ nach Kriterium (6) nicht um eine Partitionierung handelt. Es liegt nun nahe, die Klassifikationsbedingungen so zu verschärfen, dass sich die kategorialen Bereiche der vier Operationen nicht mehr überschneiden. Dieses ist aber der Definition dieser Erkenntnisoperationen entsprechend nur dadurch zu erreichen, dass die Mengen der ontischen Folgezustände $\mathbb{V}_\alpha$ ebenfalls verkleinert werden. Da aber durch die Dynamik der Operationen – siehe Abbildung 3b – alle grundsätzlich möglichen ontischen Zustände auch wieder erreicht werden, impliziert dies, dass es dann ontischen Zustände gibt, die durch keine der vier Erkenntnisoperationen erfasst würden, so dass sie in diesem Fall keine Partitionierung bilden, weil sie Kriterium (3) bzw. Kriterium (5) der Vollständigkeit nicht erfüllen. Es tritt bei diesem Ansatz offensichtlich ein Dilemma bezüglich der Anforderungen an eine Partitionierung auf, entweder sind die kategorialen Bereiche nicht disjunkt oder die Klassifikation ist nicht vollständig: Wegen der durch die Wechselwirkung induzierten Abbildung der ontischen Zustände ist es auf diese Weise grundsätzlich unmöglich, ein feinere Partitionierung mit vier Klassen zu definieren, die sowohl vollständig als auch disjunkt ist. Dies lässt sich folgendermaßen zeigen:

Wenn ein kategorialer Bereich $\mathbb{K}_\alpha$ Elemente enthält, die die jeweilige Operation $\hat{V}_\alpha$ durch ihre Dynamik selbst aus keinem Elemente von $\mathbb{K}_\alpha$ erzeugen kann – die also nicht Elemente der Menge $\mathbb{V}_\alpha$ sind –, dann können diese Elemente aus der Menge $\mathbb{K}_\alpha/\mathbb{V}_\alpha$ im Fall einer vorhergehenden Operation $\hat{V}_\alpha$ nicht mit einem positiven Ergebnis verbunden gewesen sein, weil alle Zustände P_γ, für die $\hat{V}_\alpha(P_\gamma) = w$ gilt, nach der Operation in $P_\delta \in \mathbb{V}_\alpha$ liegen müssen. Für ein System von Operationen, die eine Partitionierung bilden sollen, bedeutet dies, dass diese Zustände in einer vorhergehenden Operation entweder durch keine diese Operationen durch ein positives Ergebnis erfasst worden wären oder aber durch eine andere Operation als $\hat{V}_\alpha$, so dass die Klassifikation der ontischen Zustände dann entweder unvollständig oder nicht disjunkt wäre. Dies bedeutet, dass sich aus Operationen, bei denen die Differenzmenge der Zustände der kategorialen Bereiche und deren Folgezustände nach der Operation nicht leer ist, $\mathbb{K}_\alpha/\mathbb{V}_\alpha \neq \emptyset$, keine Partitionierung aufbauen lässt, weil die Kategorien entweder nicht disjunkt sind oder aber die Klassifikation nicht vollständig. Vor diesem Hintergrund ist festzuhalten, dass die Operationen $\hat{K}_\alpha$ und $\hat{K}_{\alpha+180°}$ also deswegen eine Partitionierung bilden, weil sie ausschließlich diejenigen ontischen Zustände durch ihre kategorialen Bereiche erfassen, die sie auch durch die induzierte Dynamik erzeugen können – also deswegen, weil dort $\mathbb{K}_\alpha/\mathbb{V}_\alpha = \emptyset$ gilt.

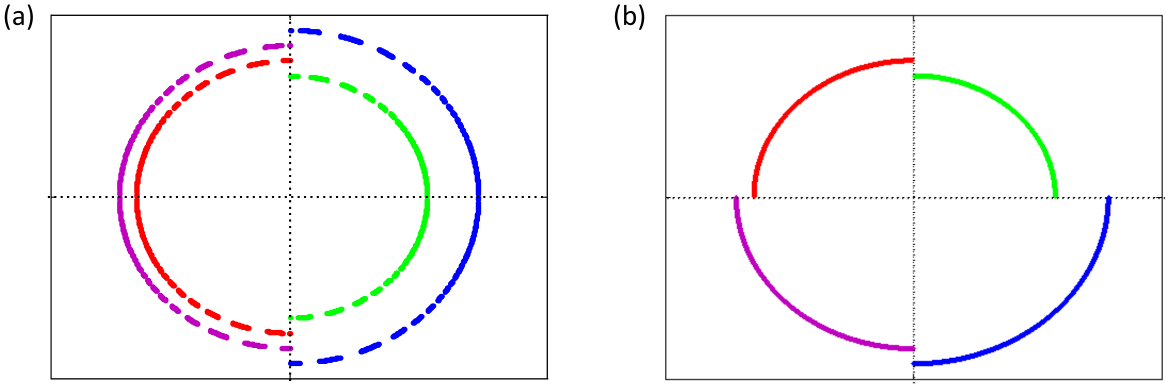

Abbildung 10: (a) Die durch die Erkenntnisoperationen $\widehat{M}_{0°}$ induzierte Klassifikation der ontischen Zustände P_γ. Die Interpretation der Punkte auf dem Kreis entspricht Abbildung 1: Der epistemische Zustand $|1\rangle$ umfasst die grünen dargestellten ontischen Zustände, $|2\rangle$ die rot dargestellten, $|3\rangle$ die violett dargestellten und $|4\rangle$ die blau dargestellten. (b) Die Verteilung der sich aus den ontischen Zuständen P_γ durch die Wirkung der Erkenntnisoperationen ergebenden ontischen Zustände P_δ – diese Verteilung entspricht den Klassifikationsbedingungen dieser Erkenntnisoperationen. Der Vergleich zeigt, wie die kategorialen Bereiche der Operationen (a) durch die Rückwirkung der Operation abgebildet werden (b).

In Abbildung 10a ist die durch $\widehat{M}_{0°}$ induzierte Unterteilung der ontischen Zustände P_γ dargestellt, in Abbildung 10b die den Zuständen in (a) entsprechenden ontischen Folgezustände P_δ nach der Wechselwirkung: Auch hier sind die jeweils farbig markierten Mengen der beiden Abbildungen nicht identisch. Die durch die Wechselwirkung erzeugten Mengen (b) liegen in diesem Fall aber weder vollständig innerhalb der jeweils entsprechenden kategorialen Bereiche,[32] was die in Tabelle 5 auf der Diagonalen befindlichen Werte von

$$p(m|m) = 0.5$$

erklärt – d.h. den Sachverhalt, dass zwei aufeinander folgende identische Erkenntnisoperationen nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $p(m|m) = 0.5$ zum selben Ergebnis kommen –, noch sind die kategorialen Bereiche und die Menge der durch jeweils andere Operationen erzeugten Zustände disjunkt: Jeweils durch zwei Operationen erzeugte Mengen – z.B. die grüne und blaue in Abbildung 10b – weisen eine Überlappung mit dem kategorialen Bereich der jeweils anderen Operation auf, was die nicht auf der Diagonale befindlichen grau unterlegten bedingten Wahrscheinlichkeiten in Tabelle 5 von

$$p(n|m) = 0.5$$

verursacht.

Wie im zuletzt diskutierten Ansatz umfassen die kategorialen Bereiche $\mathbb{K}_m$ in Abbildung 10a auch hier Zustände, die nicht in der Menge der Folgezustände $\mathbb{V}_m$ liegen, und erzeugen damit auch in diesem Fall dieselben Komplikationen. Hier umfasst aber auch die Mengen der Folgezustände $\mathbb{V}_m$ Zu-

[32] Die Zustände in den farbig markierten Mengen liegen nicht dicht, sondern weisen im gesamten Bereich immer wieder Lücken auf, was am Rand dieser Mengen noch zu sehen, im Kern aber aufgrund der Auflösung der Datenpunkte nicht wahrnehmbar ist. Die ontischen Zustände eines Halbkreises sind auf zwei im selben Halbkreis befindlichen Mengen – z.B. die grüne und die blaue – aufgeteilt. Während die Zustände in den Mengen der Folgezustände dicht liegen – siehe Abbildung 10b –, weisen die kategorialen Bereiche Lücken auf, so dass nur die Hälfte der Folgezustände in einer Folgeoperation zum selben Ergebnis führt.

stände, die außerhalb der jeweiligen kategorialen Bereiche $\mathbb{K}_m$ liegen – d.h. die Mengen $\mathbb{V}_m$ sind nicht wie im letzten Beispiel Teilmengen der kategorialen Bereiche $\mathbb{K}_m$, so dass hier auch

$$\mathbb{V}_m/\mathbb{K}_m \neq \emptyset$$

gilt, was ein ähnliches Dilemma erzeugt. Da die Elemente aus $\mathbb{V}_m/\mathbb{K}_m$ durch eine Folgeoperation per definitionem nicht wieder durch das Ergebnis m klassifiziert würden, müssen sie entweder durch ein anderes Ergebnis n klassifiziert werden – dann währen die durch die Operationen definierten Kategorien nicht disjunkt – oder durch keines der vier möglichen Ergebnisse – dann wäre die Klassifikation nicht vollständig: Entweder wird also Kriterium (6) oder Kriterium (3) einer Partitionierung nicht erfüllt. Dies bedeutet, dass sich aus Operationen, bei denen die Differenzmenge der Zustände der kategorialen Bereiche und deren Folgezustände nach der Operation nicht leer ist, $\mathbb{V}_m/\mathbb{K}_m \neq \emptyset$, keine Partitionierung aufbauen lässt, weil dann die Kategorien entweder nicht disjunkt sind oder aber die Klassifikation nicht vollständig.

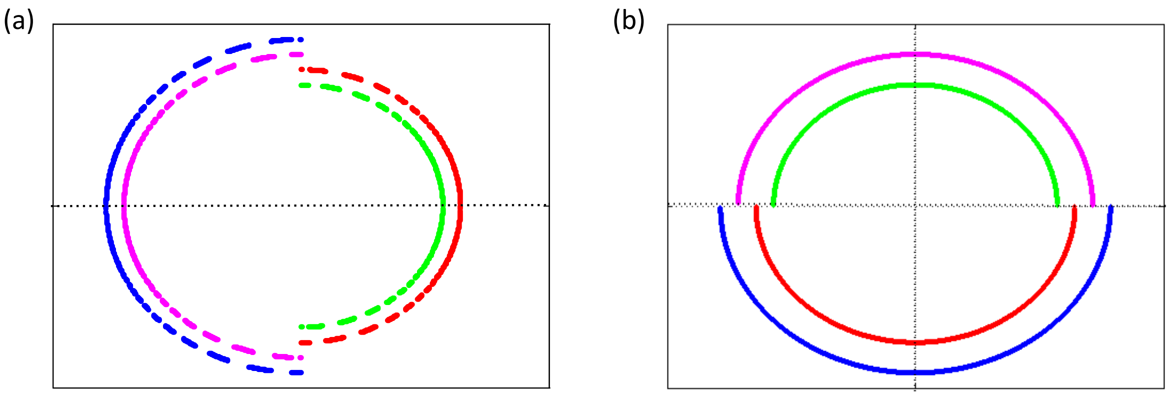

Abbildung 11: (a) Die durch die logische Konjunktion der Erkenntnisoperationen induzierte Klassifikation der ontischen Zustände P_γ. Die Interpretation der Punkte auf dem Kreis entspricht Abbildung 1: Der epistemische Zustand $|\hat{K}_{0^\circ} \wedge \hat{K}_{90^\circ}\rangle$ umfasst die grünen dargestellten ontischen Zustände, $|\hat{K}_{0^\circ} \wedge \hat{K}_{270^\circ}\rangle$ die rot dargestellten, $|\hat{K}_{180^\circ} \wedge \hat{K}_{90^\circ}\rangle$ die violett dargestellten und $|\hat{K}_{180^\circ} \wedge \hat{K}_{270^\circ}\rangle$ die blau dargestellten. (b) Die Verteilung der sich aus den ontischen Zuständen P_γ durch die Wirkung der Erkenntnisoperationen ergebenden ontischen Zustände P_δ – diese Verteilung entspricht den Klassifikationsbedingungen dieser Erkenntnisoperationen. Der Vergleich zeigt, wie die kategorialen Bereiche der Operationen (a) durch die Rückwirkung der Operation abgebildet werden (b).

Abschließend sei die in Abbildung 11 dargestellte Klassifikation der durch die logische Konjunktion der Partitionierungen

$$\mathbb{P}_A = \begin{cases} \hat{K}_{0^\circ} \\ \hat{K}_{180^\circ} \end{cases} ,$$

$$\mathbb{P}_B = \begin{cases} \hat{K}_{90^\circ} \\ \hat{K}_{270^\circ} \end{cases} ,$$

definierten vier Erkenntnisoperationen

$$\hat{\mathrm{K}}_{0^\circ} \wedge \hat{\mathrm{K}}_{90^\circ}, \qquad \hat{\mathrm{K}}_{0^\circ} \wedge \hat{\mathrm{K}}_{270^\circ}, \qquad \hat{\mathrm{K}}_{180^\circ} \wedge \hat{\mathrm{K}}_{270^\circ}, \qquad \hat{\mathrm{K}}_{180^\circ} \wedge \hat{\mathrm{K}}_{270^\circ}$$

mit den epistemischen Zustände

$$|\hat{K}_{0^\circ} \wedge \hat{K}_{90^\circ}\rangle, \qquad |\hat{K}_{0^\circ} \wedge \hat{K}_{270^\circ}\rangle, \qquad |\hat{K}_{180^\circ} \wedge \hat{K}_{90^\circ}\rangle, \qquad |\hat{K}_{180^\circ} \wedge \hat{K}_{270^\circ}\rangle$$

diskutiert. Auch hier sind offensichtlich die in Abbildung 11a und in Abbildung 11b dargestellten Mengen nicht identisch: In diesem Fall überlappen die Mengen der Folgezustände jeden der vier kategorialen Bereiche in gleicher Weise, so dass die in Tabelle 6 dargestellten, näherungsweise konstanten bedingten Wahrscheinlichkeiten der Folgemessungen von

$$p(II \mid I) \approx 0.25$$

zustande kommen. Auch die Form der Erkenntnisoperationen definiert demnach keine Partitionierung, weil auch hier weder die Menge der Folgezustände eine Teilmenge der kategorialen Bereiche noch die kategorialen Bereiche eine Teilmenge der Menge der Folgezustände sind.

Epistemische Eigenzustände als invariante Mengen ontischer Zustände

Im letzen Abschnitt wurde anhand von vier Beispielen verdeutlicht, dass das entscheidende Kriterium, ob eine Menge von Kategorien eine Partitionierung bilden und somit ein streuungsfreies System von epistemischen Zuständen definieren kann, im Verhältnis der kategorialen Bereiche zur Menge der Folgezustände liegt: Nur wenn kategoriale Bereiche und die Menge der Folgezustände identisch sind – wenn sie also unter der jeweiligen Erkenntnisoperation invariant sind[33] –, ist es möglich eine disjunkte und vollständige Klassifikation durch Erkenntnisoperationen zu implementieren. Dieser Zusammenhang soll in diesem Abschnitt näher analysiert werden, um Kriterien der Möglichkeit von Partitionierungen und somit für den Nachweis zu bestimmen, dass Operationen zu einander komplementär sind.

Zu diesem Zweck sei eine Menge von Erkenntnisoperationen

$$\widehat{K}_n, \quad n = 1, \ldots, N$$

betrachtet, die eine Menge möglicher ontischer Zustände P_γ als Partitionierung klassifizieren soll, indem sie ihnen die epistemischen Zustände $|n\rangle$ zuweist, wenn

$$\widehat{K}_n(P_\gamma) = w$$

gilt. Jede dieser Operationen basiert auf einer Wechselwirkung mit den ontischen Zuständen, so dass jeder Erkenntnisakt – jede Anwendung einer Operation zur Klassifikation der ontischen Zustände – eine Abbildung des jeweiligen ontischen Zustands auf einen Folgezustand induziert:

$$P_\delta = \mathfrak{F}_n(P_\gamma).$$

Damit ist jeder der Erkenntnisoperationen ein kategorialer Bereich zugordnet, der als diejenige Menge ontischer Zustände definiert ist, denen von der entsprechenden Operation mit $\widehat{K}_n(P_\gamma) = w$ der epistemische Zustand $|n\rangle$ zugewiesen wurde:

$$\mathbb{K}_n = \{P_\gamma \mid \widehat{K}_n(P_\gamma) = w\} = \{P_\gamma \mid P_\gamma \in |n\rangle\}.$$

Jeder dieser ontischen Zustände P_γ wird im Akt der Klassifikation auf einen Folgezustand $P_\delta = \mathfrak{F}_n(P_\gamma)$ abgebildet, so dass jeder Operation ebenfalls eine Menge von Folgezuständen zugeordnet werden kann:

[33] Ähnliche Überlegungen finden sich in Heylighen (1990).

$$\mathbb{V}_n = \{P_\delta = \mathfrak{F}_n(P_\gamma) \mid \hat{K}_n(P_\gamma) = w\} = \mathfrak{F}_n(\mathbb{K}_n).$$

Wie die Diskussion der Beispiele gezeigt hat, ist eine disjunkte und vollständige Klassifikation der ontischen Zustände nur dann möglich, wenn

$$\mathbb{K}_n/\mathbb{V}_n = \emptyset$$

gilt, weil andernfalls in einer vorhergehenden Operation $\hat{K}_n^{(-1)}$ für alle $P_\gamma \in \mathbb{K}_n/\mathbb{V}_n$

$$\hat{K}_n^{(-1)}(P_\gamma) = f$$

gelten muss, weil sie für $\hat{K}_n^{(-1)}(P_\gamma) = w$ nach der Operation in der Menge $\mathbb{V}_n$ liegen müssten. Da sich nach Kriterium (3) der Vollständigkeit von Partitionen kein ontischer Zustand für alle Operationen $\hat{K}_n(P_\gamma) = f$ ergeben darf, muss für jeden Zustand $P_\gamma \in \mathbb{K}_n/\mathbb{V}_n$ eine Operation $\hat{K}_m$ existieren, für die

$$\hat{K}_m^{(-1)}(P_\beta) = w, \quad P_\gamma = \mathfrak{F}_m(P_\beta).$$

gilt. Wenn $\mathbb{K}_n/\mathbb{V}_n \neq \emptyset$ gilt, existieren somit ontische Zustände, für die $\hat{K}_m^{(-1)}(P_\beta) = w$ und $\hat{K}_n\left(\mathfrak{F}_m(P_\beta)\right) = w$ gilt. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, im epistemischen Zustand $|m\rangle$ den epistemischen Zustand $|n\rangle$ festzustellen, ist somit $p(|n\rangle \mid |m\rangle) \neq 0$, so dass die Operationen $\hat{K}_n$ und $\hat{K}_m$ nicht disjunkt sind und Kriterium (6) von Partitionierungen verletzen:

I. Ist für eine Operation $\hat{K}_n$ die Differenzmenge $\mathbb{K}_n/\mathbb{V}_n \neq \emptyset$ nicht leer, existiert wenigstens eine weitere Operation $\hat{K}_m$ mit $p(|n\rangle \mid |m\rangle) \neq 0$ oder die Klassifikation durch die Menge der Operationen $\hat{K}_n$ ist unvollständig.

Gleichermaßen hat die Diskussion der Beispiele gezeigt, dass eine disjunkte und vollständige Klassifikation der ontischen Zustände ebenfalls nur dann möglich ist, wenn auch

$$\mathbb{V}_n/\mathbb{K}_n = \emptyset$$

gilt, weil andernfalls in einer nachfolgenden Operation $\hat{K}_n^{(+1)}$ für alle $P_\gamma \in \mathbb{V}_n/\mathbb{K}_n$ per definitionem

$$\hat{K}_n^{(+1)}(P_\gamma) = f$$

gelten muss. Da nach Kriterium (3) der Vollständigkeit von Partitionen kein ontischer Zustand für alle Operationen $\hat{K}_n(P_\gamma) = f$ ergeben darf, muss für jeden Zustand $P_\gamma \in \mathbb{V}_n/\mathbb{K}_n$ eine Operation $\hat{K}_m$ existieren, für die

$$\hat{K}_m^{(+1)}(P_\gamma) = w$$

gilt. Wenn $\mathbb{V}_n/\mathbb{K}_n = \emptyset$ gilt, existieren somit ontische Zustände P_β, für die $\hat{K}_n(P_\beta) = w$ und für die $\hat{K}_m^{(+1)}\left(P_\gamma = \mathfrak{F}_m(P_\beta)\right) = w$ gilt. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, im epistemischen Zustand $|n\rangle$ den epistemischen Zustand $|m\rangle$ festzustellen, ist somit $p(|m\rangle \mid |n\rangle) \neq 0$, so dass die Operationen $\hat{K}_n$ und $\hat{K}_m$ nicht disjunkt sind und Kriterium (6) von Partitionen verletzen:

II. Ist für einer Operation $\hat{K}_n$ die Differenzmenge $\mathbb{V}_n/\mathbb{K}_n = \emptyset$ nicht leer, existiert wenigstens eine weitere Operation $\hat{K}_m$ mit $p(|m\rangle \mid |n\rangle) \neq 0$ oder die Klassifikation durch die Menge der Operationen $\hat{K}_n$ ist unvollständig.

Um die Kriterien einer Partitionierung durch Erkenntnisoperationen zu erfüllen, muss demnach wegen I. und II. sowohl $\mathbb{V}_n/\mathbb{K}_n = 0$ als auch $\mathbb{K}_n/\mathbb{V}_n = 0$ gelten, woraus die Identität

$$\mathbb{V}_n \ = \ \mathbb{K}_n$$

folgt. Um eine vollständige und disjunkte Klassifikation – eine Partitionierung – durch eine Menge von Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_n$ zu implementieren, müssen die kategorialen Bereiche $\mathbb{K}_n$ und die Menge der Folgezustände $\mathbb{V}_n$ identisch sein: Die kategorialen Bereiche $\mathbb{K}_n$ müssen bezüglich der durch die Operationen $\widehat{K}_n$ induzierten Abbildung $\mathfrak{F}_n(.)$ eine invariante Menge[34] sein. Identifiziert man über die Beziehung der kategorialen Bereiche zur Zuschreibungsbedingung der epistemischen Zustände

$$\mathbb{K}_n \ = \ \{P_\gamma \mid P_\gamma \in |n\rangle\}$$

die epistemischen Zustände $|n\rangle$ mit der Menge der ontischen Zustände, denen sie aufgrund der Operation $\widehat{K}_n$zugeschrieben werden, folgt die Identität

$$|n\rangle = \mathbb{K}_n.$$

Die epistemischen Zustände $|n\rangle$ müssen demnach durch die Anwendung der Operation $\widehat{K}_n$ einerseits auf das Ergebnis w und andererseits auf sich selbst abgebildet werden, was sich in Operatorschreibweise als Eigenzustandsgleichung

$$w|n\rangle = \widehat{K}_n|n\rangle$$

schreiben lässt: Werden die durch die Operationen definierten epistemischen Zustände mit der Menge der ontischen Zustände identifiziert, denen sie zugeschrieben werden – wird ihre Semantik über ihre Extension definiert –, folgt aus den Kriterien der Möglichkeit einer vollständigen, streuungsfreien und eindeutigen Klassifikation der ontischen Zustände – aus den Kriterien einer Partitionierung –, dass die epistemischen Zustände Eigenzustände der Operationen zum Ergebnis w sein müssen – dass die Mengen $|n\rangle$ mit dem Ergebnis w auf sich selbst abgebildet werden.

III. Eine vollständige, streuungsfreie und eindeutige Klassifikation der ontischen Zustände durch eine Menge von Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_n$ – eine Partitionierung – ist nur dann möglich, wenn die epistemischen Zustände $|n\rangle$ Eigenzustände der Operationen zum Ergebnis w sind, $w|n\rangle = \widehat{K}_n|n\rangle$, – wenn die kategorialen Bereiche eine invariante Menge unter der Dynamik von $\widehat{K}_n$ sind.

Bedingung III. ist allerdings erst einmal nur eine notwenige Bedingung: Wenn diese Bedingung – wie in den drei diskutierten Beispielen, eine feinere Partitionierung zu implementieren – verletzt wird, ist ausgeschlossen, dass durch die Operationen $\widehat{K}_n$ eine disjunkte und vollständige, streuungsfreie Partitionierung der ontischen Zustände aufgebaut werden kann. Ist Bedingung III. hingegen für alle Operationen $\widehat{K}_n$ erfüllt, ist noch keineswegs sichergestellt, dass die Menge der Operationen $\widehat{K}_n$ eine Partitionierung bilden. So folgt beispielsweise aus dem Sachverhalt, dass alle epistemischen Zustände $|n\rangle$ Eigenzustände der Operatoren $\widehat{K}_n$ sind, nicht, dass diese Eigenzustände paarweise disjunkt sind – wie sich am Beispiel der Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_{0°}$ und $\widehat{K}_{90°}$ verdeutlichen lässt, deren epistemische

[34] „A subset $S \subset X$ is said to be *positively invariant* provided $f(x) \in S$ for all $x \in S$, i.e. $f(S) \subset S$. […] Finally, a subset $S \subset X$ is said to be *invariant* provided $f(S) = S$. Thus, if S is invariant, then the image of S is both into and onto S […]." Robinson (1999), S. 23. Vgl. auch Eubank / Farmer (1997), S. 71f, Plaschko / Bords (1995), S. 35 oder Wiggins (1988), S. 20.

Zustände $|0°\rangle$ und $|90°\rangle$ jeweils Eigenzustände sind, die aber, wie die bedingten Wahrscheinlichkeiten in Abbildung 4a zeigen, keineswegs disjunkt sind. Entsprechendes gilt natürlich auch für das Kriterium der Vollständigkeit. Es muss demnach auch Kriterium (5) und (6) der Definition von Partitionierungen Rechnung getragen werden: Die Operationen sind paarweise disjunkt, wenn für alle Paare von Operationen $\widehat{K}_n, \widehat{K}_m$ und epistemischen Zuständen $|n\rangle, |m\rangle$

$$\forall n \neq m: \quad \widehat{K}_n(|m\rangle) = f, \qquad \widehat{K}_m(|n\rangle) = f$$

gilt. Die Menge der Operationen ist vollständig, wenn die Disjunktion aller Operationen für jeden beliebigen ontischen Zustand und somit auch für jeden beliebigen epistemischen Zustand zum Ergebnis w führt:

$$\forall\, |\psi\rangle \bigvee_{n=1,\dots,N} \widehat{K}_n\ |\psi\rangle = w.$$

Aber auch unter diesen Einschränkungen ist eine eindeutige, scharfe Klassifikation der ontischen Zustände noch nicht gewährleistet: Es wird zwar durch die Forderung, dass die epistemischen Zustände Eigenzustände der sie jeweils definierenden Operationen zu sein haben, $w|n\rangle = \widehat{K}_n|n\rangle$, sichergestellt, dass das Ergebnis jeder Operation nicht durch die Rückwirkung *dieser* Operation auf die ontischen Zustände verändert wird – dass also die Operationen in ihrem Ergebnis *selbst*konsistent sind –, weil gefordert wird, dass die kategorialen Bereiche relativ zur induzierten Dynamik so zu definieren sind, dass die ontischen Zustände durch den Akt der Klassifikation nicht die Grenzen der kategorialen Bereiche kreuzen können.[35] Dadurch wird aber noch nicht ausgeschlossen, dass einige der durch den epistemischen Zustand $|n\rangle$ zusammengefassten ontischen Zustände unter der Wirkung einer anderen Operation $\widehat{K}_m$ den kategorialen Bereich von $\widehat{K}_n$ verlassen, so dass in diesen Fällen

$$\widehat{K}_n\widehat{K}_m|n\rangle = f$$

gelten würde. Die Klassifikation der ontischen Zustände durch die Erkenntnisoperationen wäre dann nicht mehr eindeutig, weil die Ergebnisse der Operationen davon abhingen, ob und welche anderen Operationen vorher ausgeführt worden sind. Damit eine Menge von Operationen eine Partitionierung – also eine eindeutige und streuungsfreie Klassifikation der ontischen Zustände – implementiert, müssen die epistemischen Zustände nicht nur invariant unter derjenigen Operation sein, die sie jeweils definieren, sondern gleichermaßen invariant unter allen Operationen, die zur Partitionierung gehören, was damit äquivalent ist, dass die Ergebnisse der Operationen einer Partitionierung nicht von der Reihenfolge ihrer Anwendung abhängen dürfen.[36] Da die Operationen einer Partitionierung – wie ausgeführt – auch disjunkt sein müssen, muss demnach jeder epistemische Zustand $|n\rangle$ Eigenzustand aller anderen Operationen $\widehat{K}_m$ zum Ergebnis f sein:

$$\forall n \neq m:\ f|n\rangle = \widehat{K}_m|n\rangle.$$

[35] Hier wird eine Parallele zur der in Spencer-Brown (1997) entwickelten Unterscheidungstheorie deutlich, die insbesondere die Ähnlichkeit komplementärer Operationen zu der dort definierten Form der Paradoxie betrifft. Vgl. hierzu auch Spieß (2008).

[36] Dass dies nicht für beliebige Erkenntnisoperationen der Simulation der Fall ist, sondern nur für jeweils um 180° verschobene Operationen gilt, zeigt Abbildung 5a. Diese um 180° verschobenen Operationen bilden demnach auch nach diesem Kriterium eine Partitionierung.

IV. Eine vollständige, eindeutige und streuungsfreie Klassifikation von ontischen Zustände durch eine Menge von Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_n$ – eine Partitionierung – liegt dann vor, wenn (1) die epistemischen Zustände $|n\rangle$ Eigenzustände der sie definierenden Operationen zum Ergebnis w sind, $w|n\rangle = \widehat{K}_n|n\rangle$, – wenn die Menge der positiv klassifizierten ontischen Zustände $|n\rangle$ eine invariante Menge unter der Dynamik von $\widehat{K}_n$ ist – , (2) die epistemischen Zustände $|n\rangle$ Eigenzustände aller anderen Operationen $\widehat{K}_{n\neq m}$ zum Ergebnis f sind, $f|n\rangle = \widehat{K}_{m\neq n}|n\rangle$, – wenn Mengen ontischer Zustände $|n\rangle$ auch unter allen anderen Operationen $\widehat{K}_m$ invariant sind –, und (3) wenn die Disjunktion aller Operationen immer zum Ergebnis w führt: $\forall\ |\psi\rangle \quad \bigvee_{n=1,\dots,N} \widehat{K}_n\ |\psi\rangle = w$.

Dieses Kriterium ist identisch mit der Definition komplementärer Operationen in der Quantenmechanik, die komplementäre Operationen darüber definiert, dass (1) entweder die Reihenfolge ihrer Anwendung keine Rolle spielt und mithin ihr Kommutator verschwindet oder (2) und äquivalent dazu, dass sie einen gemeinsamem Satz von Eigenzuständen besitzen:[37] Es ist durchaus bemerkenswert, dass sich aus einer Analyse des Effekts der Wechselwirkungen, die Erkenntnisakte ermöglichen, als Bedingung einer eindeutig definierten Klassifikation von ontischen Zuständen eine Invarianzbedingung in Form einer Eigenzustandsgleichung ergibt, die formal den Eigenzustandsgleichungen der

---

[37] Die Operatoren-Algebra der Quantenmechanik ist nicht-kommutativ – bei Anwendung von mehr als einem Operator auf einen Zustand hängt das Ergebnis von deren Reihenfolge ab. Um diesen Sachverhalt formal beschreiben zu können, wird – wie auch in der erkenntnisoperationalen Simulation bereits diskutiert – ein neuer Operator, der Kommutator $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$, eingeführt, der den Effekt des Vertauschens der Reihenfolge der beiden Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ ausdrückt (Vgl. z.B. Schwabel (2005), S. 82-84.):

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Offensichtlich gilt für den Kommutator $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$, wenn die Reihenfolge der Operatoren keine Rolle spielt – wenn also $\hat{A}$, $\hat{B}$ vertauschen. Verwendet man die Spektraldarstellung der Operatoren, so lässt sich ihr Kommutator als Funktion der Kommutatoren der jeweiligen Eigenzustandsprojektoren darstellen:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \sum_{n,m} \alpha_n b_m\ \ [|\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|, |\beta_m\rangle\langle\beta_m|]$$

Der Kommutator $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ ist demnach genau dann Null, wenn der Kommutator für alle Paare von Eigenzustandsprojektoren Null ist:

$$[|\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|, |\beta_m\rangle\langle\beta_m|] = 0 \qquad \forall n, m$$

Dies ist dann der Fall, wenn

$$[|\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|, |\beta_m\rangle\langle\beta_m|] = \langle\alpha_n|\beta_m\rangle\ |\alpha_n\rangle\langle\beta_m| - \langle\beta_m|\alpha_n\rangle\ |\beta_m\rangle\langle\alpha_n| = 0$$

gilt. Diese Bedingung kann in zwei verschiedenen Fällen erfüllt werden, die für die Eigenvektoren $|\alpha_n\rangle$, $|\beta_m\rangle$ der beiden Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ gelten müssen:

$$\begin{aligned}&(1)\ \ |\alpha_n\rangle \neq |\beta_m\rangle \ \Rightarrow\ \langle\alpha_n|\beta_m\rangle = 0\\ &(2)\ \ |\alpha_n\rangle = |\beta_m\rangle \ \Rightarrow\ \langle\alpha_n|\beta_m\rangle = 1\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Eigenvektoren $|\alpha_n\rangle$, $|\beta_m\rangle$ entweder identisch oder aber orthogonal sein müssen. Da dieser Zusammenhang für alle möglichen Paare von Eigenvektoren gelten muss, muss jeder Vektor $|\alpha_n\rangle$ mit genau einem der Vektoren $|\beta_m\rangle$ identisch sein und mit allen anderen orthogonal: Die Mengen $|\alpha_n\rangle$, $|\beta_m\rangle$ müssen dasselbe System orthonormaler Vektoren bilden bzw. sie müssen eine identische Orthonormalbasis des Hilbertraums sein. Diese für die Interpretation der Komplementarität zentralen Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen: Das Ergebnis der Anwendung zweier Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ hängt nur dann nicht von der Reihenfolge ihrer Anwendung ab, wenn ihr Kommutator $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ Null ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Menge der Eigenzustände der beiden Operatoren identisch ist. Solche Operatoren werden als *verträglich* oder als *kompatibel* bezeichnet (Vgl. Nolting (1994), S. 173f. und Primas (1984), S. 62f.): Operatoren sind nur dann kompatibel, wenn sie einen gemeinsamen Satz von Eigenvektoren besitzen. Nicht kompatible Operatoren werden als *komplementär* bezeichnet.

Quantenmechanik entspricht, die dort als Basis des jeweils verwendeten semantischen Koordinatensystems fungieren: Jede Repräsentation eines quantenmechanischen Systems wird auf der Basis von Eigenzuständen von Operatoren vorgenommen, so dass die einzigen repräsentationalen Zustände der Quantenmechanik die Eigenzustände ihrer Operatoren sind. Dies legt den Verdacht nahe, dass die Quantenmechanik implizit auf der Annahme basiert, dass nur die Eigenzustände der Operatoren einen definierten semantischen Gehalt besitzen, was sich mit Bedingung IV. deckt, die nichts anderes besagt, als dass ausschließlich Mengen, die unter der definierenden Wechselwirkung invariant[38] sind, – also epistemische Zustände, die Eigenzustände der Erkenntnisoperationen sind – eine eindeutig definierte Klassifikation ontischer Zustände ermöglichen und somit einen klar definierten semantischen Gehalt im Sinne ihrer Extension besitzen.[39] Diese Parallele kann als weiteres Indiz angesehen werden, dass es sich im Fall der wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen um eine der quantenmechanischen Komplementarität entsprechende Form von Komplementarität handelt.

Definition der Komplementarität von wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen

Nachweis der Komplementarität der Erkenntnisoperationen

Ausgangspunkt der Überlegungen zu den in Bedingung IV. zusammengefassten Kriterien der Möglichkeit der Implementierung von Partitionierungen durch Erkenntnisoperationen war die Frage, ob es sich bei relativ zueinander unscharfen Erkenntnisoperationen um im Sinne der Quantenmechanik genuin komplementäre Operationen handelt. Dieser Verdacht ergab sich daraus, dass die Verteilung der bedingten Wahrscheinlichkeiten dieser Operationen in sehr guter Übereinstimmung mit dem Verlauf der bedingten Wahrscheinlichkeiten von Spin-Operatoren vom klassisch zu erwartenden Verlauf abweicht, und wurde dadurch erhärtet, dass im ersten Teil dieser Arbeit gezeigt wurde, dass sich – ebenfalls in Korrespondenz mit der quantenmechanischen Form der Komplementarität – der aus der Simulation ergebende Verlauf der bedingten Wahrscheinlichkeiten grundsätzlich nicht auf der Basis der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie rekonstruieren lässt. Um diese Frage zu klären wurde davon ausgegangen, dass genuin komplementäre Operationen irreduzibel unscharf zueinander sind, so dass im Folgenden zu klären war, ob sich die Unschärfe der Erkenntnisoperationen reduzieren lässt: Das Konzept der Partitionierung wurde als eine eindeutige, disjunkte und vollständige Klassifikation ontischer Zustände eingeführt. Zwei relativ zueinander unscharfe Klassifikationen sind dann lediglich reduzibel unscharf, wenn eine informativere Partitionierung existiert, über die sich beide Klassifikationen eindeutig definieren lassen. Im Gegensatz dazu werden Klassifikationen als komplementär angesehen, wenn keine solche feinere Partitionierung existiert.

---

[38] Im Anschluss an die Invariantentheorie Kleins, vertritt Ernst Cassirer die Auffassung, dass es sich beim semantischen Gehalt von Begriffen um die Invarianten von Transformationen handelt. Für eine knappe Darstellung vgl. Kralemann (2000), S. 109-112, eine ausführliche Darstellung findet sich in Ihmig (1997). Ähnlich legen Untersuchungen von neuronalen Netzwerken nahe, dass ihre semantisch definierten, repräsentationalen Zustände die Eigenzustände des Netzwerks sind. Vgl. Hopfield (1982) oder Kralemann (2006), S. 162-171.

[39] Ist dies nicht der Fall, kann durch eine komplexe Verkettung von Operationen schließlich jeder ontische Zustand durch jede der möglichen Operationen repräsentiert werden, wodurch diese Form der Repräsentation im Extremfall dann keinerlei Information mehr über die Umwelt trägt, weil deren Zustände dann eben nicht mehr in einer regelhaften Beziehung zu den repräsentationalen – also hier epistemischen – Zuständen stehen. In diesem Sinne lässt sich die Forderung, dass durch Erkenntnisoperationen definierte repräsentationale Zustände Eigenzustände dieser Operationen zu sein haben, als transzendentale Voraussetzung eines informativen Umweltbezugs – als Bedingung der Möglichkeit eines definierten semantischen Gehalts – auffassen.

Vor dem Hintergrund dieses Kriteriums wurde dann gezeigt, dass klassische Kategorien lediglich irreduzibel unscharf sind, weil sich immer leicht eine feinere klassische Partitionierung angeben ließ. Im Gegensatz dazu wurde dann an drei unterschiedlichen erkenntnisoperationalen Varianten klar, dass sich eine solche feinere Partitionierung nicht durch die eingangs definierten Erkenntnisoperationen implementieren lässt. Dies lässt sich zwar als weiterer Hinweis darauf auffassen, dass es sich im Fall der Erkenntnisoperationen um eine genuine Form von Komplementarität handelt, nicht aber als Beweis, weil aus dem Scheitern von drei Versuchen nicht die grundsätzliche Unmöglichkeit folgt. Aus der Analyse der Ursachen des Scheiterns der drei Varianten wurde dann das in IV. zusammengefasste Kriterium der Möglichkeit der Implementierung von Partitionen durch Erkenntnisoperationen entwickelt. Vor dem Hintergrund dieses Kriteriums soll nun im Folgenden gezeigt werden, dass die hier diskutierten Erkenntnisoperationen relativ zueinander grundsätzlich irreduzibel unscharf und somit komplementär sind, weil es nicht möglich ist, über die in diesen Operationen verwendete Form der Wechselwirkung eine feinere Partitionierung zu implementieren, über die die Erkenntnisoperationen definiert werden können.

Da gemäß Kriterium IV. die notwendige Voraussetzung jeder Partitionierung die Existenz von epistemischen Eigenzuständen der Operationen ist, kann aus dem Nachweis, dass es für eine gegebene Operation keine feineren Eigenzustände gibt, geschlossen werden, dass es keine feinere Partitionierung gibt, über die sie definiert werden kann. Zwei Erkenntnisoperationen sind demnach irreduzibel unscharf und somit komplementär, wenn gezeigt werden kann, dass für die ihnen zugrunde liegende Wechselwirkung keine feineren Eigenzustände, also keine kleineren invarianten Mengen von ontischen Zuständen existieren.

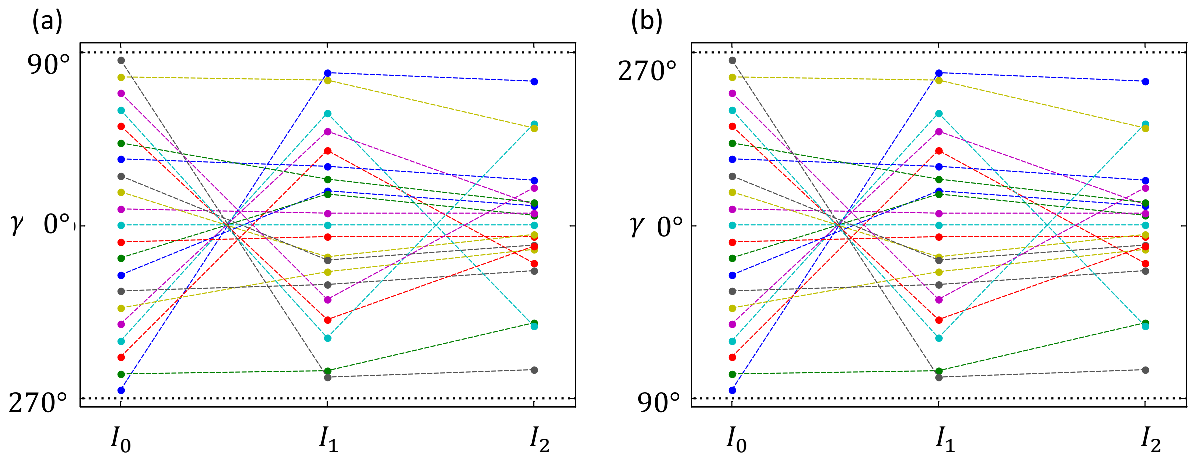

Abbildung 12: (a) Die Entwicklung von 20 ontischen Zuständen P_γ unter der durch die Erkenntnisoperation $\widehat{K}_{0°}$ bzw. $\widehat{K}_{180°}$ induzierten Dynamik im Bereich B^I für zwei Iterationen der Operation. (b) Die Entwicklung von 20 ontischen Zuständen P_γ unter der durch die Erkenntnisoperation $\widehat{K}_{0°}$ bzw. $\widehat{K}_{180°}$ induzierten Dynamik im Bereich B^{II} für zwei Iterationen der Operationen. (1) Es verlässt keiner der Zustände die Bereiche B^I und B^{II} durch die Abbildung auf seinen jeweiligen Folgezustand. (2) Die Abbildung auf die Folgezustände führt zu einer Konvergenz gegen das jeweilige Zentrum. (3) Es kommt dabei zu ‚Sprüngen' zwischen der oberen und unteren Hälfte der beiden Bereiche.

Bevor diese Argumentationsform auf die Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_\alpha$ angewendet werden, soll mit ihr erst einmal verdeutlicht werden, warum es im Fall klassischer Kategorien nicht zu komplementären Verhältnissen kommen kann. Die klassische Kategorisierung von ontischen Zuständen geht davon aus, dass diese klassifiziert werden können, ohne mit ihnen wechselwirken zu müssen – d.h. davon, dass es eine ‚Einbahnstraße' der Information gibt, über die zwar Information aus der Umwelt in die Repräsentationssysteme gelangen, durch die aber die repräsentierten Zustände nicht beeinflusst werden. Sollen diese klassischen Kategorien in Form von Operationen dargestellt wird, handelt es sich um Identitätsoperatoren, d.h. um Operatoren, die jeden ontischen Zustand auf sich selbst abbilden. Daraus folgt, dass auch jede Menge von ontischen Zuständen durch diese klassischen Identitätsoperationen auf sich selbst abgebildet wird und somit invariant unter einer solchen klassischen Operation ist: Für klassische Operationen ist trivialer Weise jeder als Menge ontischer Zustände definierte epistemische Zustand ein Eigenzustand – im Extremfall auch ein epistemischer Zustand, der nur genau einen ontischen Zustand umfasst. Klassische Kategorien können als Identitätsoperationen beliebig kleine und somit beliebig informative epistemische Zustände definieren, so dass für unscharfe klassische Kategorien immer eine feinere Partitionierung existiert, über die sie definiert werden können. Klassische Kategorien sind als Identitätsoperationen nie komplementär! Die Forderung nach Eigenzuständen wird erst dann zur Einschränkung des möglichen Auflösungsvermögens von Erkenntnisoperationen, wenn diese keine Identitätsoperationen sind, sondern es zu einer tatsächlichen Veränderung der ontischen Zustände im Akt der Erkenntnis kommt.

Dies ist bei den dieser Arbeit als Simulationsbeispiele zugrunde liegenden Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_\alpha$ der Fall, deren induzierte Dynamik zu einer Abbildung jedes ontischen Zustands auf einen Folgezustand führt, die in Abbildung 3b für $\widehat{K}_{0^\circ}$ bzw. für $\widehat{K}_{180^\circ}$ dargestellt ist. In Abbildung 12 ist diese Entwicklung am Beispiel von 20 ontischen Zuständen im Detail für 2 Iterationen der Operation $\widehat{K}_{0^\circ}$ bzw. $\widehat{K}_{180^\circ}$ in zwei Bereichen

$$\begin{aligned} B^I &= 0^\circ \mp 90^\circ \\ B^{II} &= 180^\circ \pm 90^\circ \text{'} \end{aligned}$$

dargestellt, die den grün gestrichelt umrandeten Kästchen in Abbildung 3b entsprechen: in Abbildung 12a für den Bereich B^I und in Abbildung 12b für den Bereich B^{II}. Wie dieser Darstellung zu entnehmen ist, verlässt (1) keiner der Zustände unter dem Einfluss der Operation den jeweiligen Bereich, so dass durch die Dynamik der Operation $\widehat{K}_{0^\circ}$ die Menge der ontischen Zustände in diese zwei disjunkten Bereiche gegliedert wird: Es werden demnach alle Zustände aus B^I wieder auf B^I abgebildet und alle Zustände aus B^{II} wieder auf B^{II}. Dies ist dadurch bedingt, dass jeder ontische Zustand auf dem Kreis per Konstruktion der Operation zu derjenigen Ladung der Messvorrichtung hingezogen wird, zu der eine geringere Distanz besteht – siehe Abbildung 2a –, so dass es nicht zu einem Wechsel der ontischen Zustände zwischen den Bereichen B^I und B^{II} kommen kann. Des Weiteren lässt sich Abbildung 3b entnehmen, dass jeder Zustand aus diesen Bereichen auch wieder durch Zustände dieser Bereiche erreicht wird. Die Bereiche B^I und B^{II} sind demnach einerseits invariante Mengen unter den Operationen $\widehat{K}_{0^\circ}$ bzw. für $\widehat{K}_{180^\circ}$, wobei die über die Kraftverhältnisse operationalisierte Definition der Zugehörigkeit zu den epistemischen Zuständen den Bereichen B^I und B^{II} entspricht,

$$\begin{aligned} |0^\circ\rangle &= B^I \\ |180^\circ\rangle &= B^{II} \text{'} \end{aligned}$$

während andererseits damit die folgenden Zusammenhänge

$$w|0^\circ\rangle = \widehat{K}_{0^\circ}|0^\circ\rangle \qquad w|180^\circ\rangle = \widehat{K}_{180^\circ}|180^\circ\rangle,$$

$$f|0^\circ\rangle = \widehat{K}_{180^\circ}|0^\circ\rangle \qquad f|180^\circ\rangle = \widehat{K}_{0^\circ}|180^\circ\rangle,$$

gelten: Die epistemischen Zustände sind jeweils Eigenzustände beider Operatoren und sind disjunkt und vollständig. Des Weiteren lässt sich Abbildung 5a entnehmen, dass die Reihenfolge der Operationen $\widehat{K}_{0°}$ bzw. für $\widehat{K}_{180°}$ keinen Effekt auf die Resultate hat, so dass

$$\mathbb{P}_0 = \begin{cases} \widehat{K}_{0°} \\ \widehat{K}_{180°} \end{cases}$$

die Kriterien einer Partitionierung erfüllen. Mit einer analogen Argumentation folgt, dass jedes Paar von Operationen der Form

$$\mathbb{P}_A = \begin{cases} \widehat{K}_{\alpha} \\ \widehat{K}_{\alpha+180°} \end{cases}$$

eine Partitionierung ist.

Aus Abbildung 12 lässt sich aber auch (2) entnehmen, dass die Abbildung auf die Folgezustände für einige Zustände zu einer Konvergenz gegen das jeweilige Zentrum – also $0°$ und $180°$ führt –, was einerseits zu der in Abbildung 4b dargestellten Veränderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der ontischen Zustände unter den Operationen und andererseits dazu führt, dass jeder Teilraum der Bereiche B^I und B^{II} von Zuständen in Richtung auf das Zentrum hin verlassen wird. Würde ein solcher Teilraum als kategorialer Bereich der Operation gewählt werden, wäre er demnach nicht invariant unter der Operation, weil diese Zustände ihn unter der Operation verlassen.

Um kleinere invariante kategoriale Bereiche als B^I und B^{II} zu definieren, bliebe vor diesem Hintergrund nur noch die Möglichkeit, B^I und B^{II} jeweils in der Mitte zu teilen, weil so die Konvergenz gegen das Zentrum nicht zu einem Verlassen dieser Teilräume führen würde – allerdings nur solange kein Zustand das Zentrum der Bereiche unter den Operationen kreuzt, also von der oberen in die untere Hälfte wechselt und vice versa. Abbildung 12 zeigt nun aber (3), dass es ebenfalls ontische Zustände gibt, die unter dem Einfluss der Operationen einen solchen Wechsel zwischen oberer und unterer Hälfte vollziehen. Aus (1) und (2) folgt, dass die Bereiche B^I und B^{II} nicht in weitere Teilmengen aufgeteilt werden können, die unter der durch die Erkenntnisoperationen induzierten Dynamik invariante Mengen sind.[40]

Es lässt sich demnach einerseits feststellen, dass die erkenntnisoperationale Klassifikationen vom Typ

$$\mathbb{P}_A = \begin{cases} \widehat{K}_{\alpha} \\ \widehat{K}_{\alpha+180°} \end{cases}$$

mit

$$|\alpha\rangle, \qquad |\alpha + 180°\rangle$$

[40] Eine noch offen Frage ist, ob grundsätzlich jede Form der Abbildung der ontischen Zustände durch Erkenntnisoperationen, eine beliebig feine Unterteilung der ontischen Zustände in invariante kategoriale Bereiche und somit eine beliebig feine erkenntnisoperationale Partitionierung ontischer Zustände verhindert, oder ob dies nur für bestimmte Formen der Abbildung der ontischen Zustände der Fall ist. Die Arbeiten von Calude / Calude / Svozil / Yu (1997) legen den Verdachte nahe, dass nur irreversible – also nicht strikt monotone – Abbildungen der Zustände die Existenz von beliebigen Eigenzuständen unmöglich machen.

sowohl die geforderten Eigenzustände als auch die weiteren notwendigen Eigenschaften besitzen und daher Partitionierungen sind, und andererseits, dass es keine weniger umfassende Eigenzustände und somit keine feineren Partitionierungen der ontischen Zustände durch diese Form der Wechselwirkung geben kann. Die Kategorien zweier Partitionierungen

$$\mathbb{P}_A = \begin{cases} \widehat{K}_\alpha \\ \widehat{K}_{\alpha+180^\circ} \end{cases} ,$$

$$\mathbb{P}_B = \begin{cases} \widehat{K}_\beta \\ \widehat{K}_{\beta+180^\circ} \end{cases} ,$$

sind daher für $\alpha \neq \beta$ notwendig irreduzibel unscharf und somit komplementär.

Definition der Komplementarität

Nachdem im letzen Abschnitt auf der Basis der Kriterien der Möglichkeit der Implementierung von Partitionierungen ontischer Zustände durch Erkenntnisoperationen gezeigt wurde, dass die eingangs definierten Erkenntnisoperationen komplementär sind, sollen die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit nun abschließend in einer Definition der Komplementarität von Erkenntnisoperationen zusammengefasst werden. Das zentrale Anliegen von Erkenntnisbemühungen ist die Repräsentation der Umwelt. Wird des Weiteren angenommen, dass eine solche Repräsentation der Umwelt durch epistemische Zustände eines Repräsentationssystems nicht ohne eine informationsübertragende Interaktion mit den ontischen Zuständen der Umwelt möglich ist, müssen Erkenntnisakte als auf Wechselwirkungen basierende Erkenntnisoperationen aufgefasst werden. Gegenstand dieser Arbeit ist es, die Implikationen solcher Erkenntnisoperationen anhand einer numerischen Simulation eines fiktiven Szenarios einer wechselwirkungsbasierten Repräsentationsbeziehung zu studieren. Die der Arbeit zugrunde liegende Hypothese ist, dass diese Implikationen im Auftreten von im Sinne der Quantenmechanik genuin komplementären Beziehungen solcher Erkenntnisoperationen liegen. Diese Hypothese wurde in einer ersten Studie[41], in der die Simulation der Erkenntnisoperationen entwickelt wurde und die im ersten Abschnitt dieser Arbeit in ihren Grundzügen zusammengefasst ist, unter anderem dadurch motiviert, dass sich gezeigt hat, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Erkenntnisoperationen in guter Übereinstimmung mit dem Verlauf der bedingten Wahrscheinlichkeiten von quantenmechanischen Spin-Systemen von dem klassisch zu erwartenden Verlauf abweicht, und dadurch erhärtet, dass im ersten Teil der vorliegenden Arbeit gezeigt werden konnte, dass dieser Verlauf der bedingten Wahrscheinlichkeiten – wieder in Übereinstimmung mit der Quantenmechanik – nicht mit den Annahmen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie kompatibel ist: die in der Simulation ‚empirisch gemessenen' Wahrscheinlichkeiten sind – wie die komplementärer quantenmechanischer Operatoren – keine klassischen Wahrscheinlichkeiten.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde dann der Versuch unternommen nachzuweisen, dass die Erkenntnisoperationen genuin komplementär sind. Dazu wurde von dem für die Quantenmechanik typischen Charakteristikum komplementärer Operatoren ausgegangen, dass ihre Resultate relativ zueinander irreduzibel unscharf sind.

> DEFINITION 1: UNSCHARF: Zwei Operationen $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ sind relativ zueinander unscharf, wenn die bedingten Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der durch sie definierten epistemischen Zustände

[41] Vgl. Kralemann (2010).

$|a\rangle$ und $|b\rangle$ weder 1 noch 0 sind, $p(a|b) \neq 1 \wedge p(a|b) \neq 0$, weil dann die Streuung der Ergebnisse der einen Operation im epistemischen Zustand der jeweils anderen nicht verschwindet.

Dieses Kriterium ist aber lediglich notwendig für das Vorliegen genuin komplementärer Verhältnisse, weil auch in klassischen Kategoriensystemen relativ zueinander unscharfe Kategorien auftreten, wenn ihre kategorialen Bereiche – ihre Extensionen – nicht disjunkt sind. Die entscheidenden Schritte der Argumentation bestehen demnach darin (1) zu spezifizieren, unter welchen Bedingungen (1) Operationen *irreduzibel* unscharf sind, um dann (2) zu zeigen, dass diese Kriterien auf die Erkenntnisoperationen zutreffen. Da die Ursache der Unschärfe in der Überschneidung kategorialer Bereiche liegt, also in dem Sachverhalt, dass derselbe ontische Zustand Element mehrerer epistemischer Zustände ist, wurde das Konzept der Partitionierung eingeführt - einer vollständigen, disjunkten und eindeutigen Klassifikation von ontischen Zuständen: In einer Partitionierung sind alle ontischen Zustände eindeutig einem der durch sie definierten epistemischen Zustände zugeordnet, so dass diese epistemischen Zustände einer Partitionierung per definitionem relativ zueinander nicht unscharf und somit nicht komplementär sein können. Zwei unscharfe Operationen werden dann als reduzibel unscharf angesehen, wenn eine feinere, informativere Partitionierung durch Erkenntnisoperationen implementiert werden kann, die die relativ zueinander unscharfen Operationen eindeutig zu definieren gestattet, weil in diesem Fall die Unschärfe nicht prinzipieller Natur, sondern lediglich Folge einer willkürlichen, kontingenten Entscheidung für spezielle kategoriale Bereiche ist, die auch anders hätte getroffen werden können.

DEFINITION 2: REDUZIBEL UNSCHARF: Zwei Operationen $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ sind reduzibel unscharf, wenn sie (1) nach Definition (1) unscharf sind und (2) eine Partitionierung $\mathbb{P}$ existiert, durch die sich $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ als eindeutige Funktionen deterministisch definieren lassen – wenn also eine eindeutige, vollständige und scharfe Klassifikation der ontischen Zustände existiert, die mindestens den durch $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ repräsentierten Informationsgehalt repräsentiert.

Aus der Bedingung, dass die Klassifikation der ontischen Zustände durch eine Partitionierung grundsätzlich streuungsfrei zu sein hat – dass also in einer Partitionierung jeder ontische Zustand unabhängig vom Kontext genau einem epistemischen Zustand zugeordnet werden muss – ergab sich aus der Analyse des Scheiterns von drei Varianten der Implementierung von Partitionierungen durch die Erkenntnisoperationen die notwendige Bedingung, dass die epistemischen Zustände einer Partitionierung invariante Mengen unter der durch die Operationen induzierten Abbildung der ontischen Zustände auf Folgezustände sein müssen:[42] Die auf der Basis einer Wechselwirkung definierten Klassi-

[42] Den Zusammenhang zwischen Stabilitätsbedingungen im Sinne von Attraktoren – also stabilen invarianten Mengen – und sinnvollen Zuschreibungen von Makrozuständen durch die Partitionierung von Zustandsräumen betont Atmanspacher (2007), S. 11f:

„We will now show that a particular concept of stability is crucial for a ‚proper' choice of such partition […]. […] These partitions are called generating partitions. They exist for chaotic systems and provide the supremum of the dynamical entropy of such system (over all possible partitions), the so-called Kolmogorov-Sinai entropy […]. This is equivalent with the minimization of correlation between their cells as caused by the chaotic dynamics […]. This in turns minimizes the fuzziness of the symbolic states […]. […] If there are many attractors coexisting, such partition can be approximately determined by the boundaries between the coexisting basins of attraction. […] A key result […] is that a non-generating partition is incomepatible with any other partition." Vgl. auch Atmanspacher / Bishop (2007).

In diesem Sinne kann man die Forderung, dass die Partitionierung des Zustandsraums, die die durch den Messprozess definierten epistemischen Zustände definiert, unter der Dynamik des Messprozesses stabil sein muss, dahingehend interpretieren, dass durch einen Messprozess solche Partitionierungen zu definieren sind, die unter der durch den Messprozess selbst induzierten Dynamik ‚generating partitions' sind – also unter der fikationsbedingungen – die kategorialen Bereiche der Operationen – müssen so gewählt werden, dass kein ontischer Zustand durch den Effekt der Wechselwirkung die Klasse verlässt, der er durch die Operation zugeordnet wird – die durch die Operationen vorgenommene Klassifikation muss relativ zu der durch die Operation induzierten Veränderung der ontischen Zustände selbstkonsistent sein, damit eine eindeutige Zuordnung der ontischen Zustände zu epistemischen Zuständen und somit eine eindeutig definierte Semantik der epistemischen Zustände gewährleistet ist: Die durch die Operationen definierten epistemischen Zustände müssen Eigenzustände der Operationen sein:[43]

> DEFINITION (3): SEMANTISCH DEFINIT: Der durch eine Erkenntnisoperation $\widehat{K}_a$ definierte epistemische Zustand $|a\rangle$ ist im Sinne einer extensionalen Semantik als Menge der durch ihn repräsentierten ontischen Zustände nur dann eindeutig bestimmt und somit semantisch definit, wenn $|a\rangle$ eine invariante Menge unter der durch $\widehat{K}_a$ induzierten Abbildung der ontischen Zustände ist – wenn $\widehat{K}_a$ Eigenzustand der Operation $\widehat{K}_a$ zum Ergebnis w ist: $w|a\rangle = \widehat{K}_a|a\rangle$.

Damit es in einer Partitionierung zu einer vollständigen und eindeutigen Zuordnung der ontischen Zustände kommt, muss aber nicht nur die notwendige Bedingung erfüllt sein, dass alle Erkenntnisoperationen der Partitionierung semantisch definit sind, sondern ebenfalls die weitere Bedingung, dass die epistemischen Zustände der Partitionierung wechselseitig invariant unter der induzierten Abbildung der ontischen Zustände – also wechselseitig bzw. simultan semantisch definit – sind. Da eine eindeutige Zuordnung der ontischen Zustände ohnehin voraussetzt, dass die Klassifikation disjunkt ist, impliziert die Forderung nach einer wechselseitig eindeutig definierten Semantik der epistemischen Zustände eine disjunkte Zuordnung durch die Operationen – also eine exklusive Zuweisung der Ergebnisse w und f:

> DEFINITION (4): SIMULTAN SEMANTISCH DEFINIT: Eine Menge von Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_n$ ist dann wechselseitig oder simultan semantisch definit, wenn die epistemischen Zustände $|n\rangle$ nicht nur Eigenzustände der sie jeweils definierenden Operationen zum Ergebnis w sind, $w|n\rangle = \widehat{K}_n|n\rangle$, – wenn also die Operationen nach Definition (3) jeweils semantisch definit sind, sondern wenn die epistemischen Zustände $|n\rangle$ ebenfalls Eigenzustände aller anderen Operationen $\widehat{K}_{n\neq m}$ zum Ergebnis f sind, $f|n\rangle = \widehat{K}_{m\neq n}|n\rangle$, – wenn die als Mengen ontischer Zustände definierten epistemischen Zustände $|n\rangle$ unter allen Operationen $\widehat{K}_n$ mit einer exklusiven Zuordnung des Ergebnisses w invariant sind.

Über diese Anforderungen hinaus muss eine Partitionierung ebenfalls vollständig sein:

Dynamik des Messprozesses nicht korreliert oder fuzzy sind. Im Beispielmodell entspricht das den beiden halbkreisförmigen Attraktoren der Dynamik des Messprozesses. Auch steht die Forderung, dass epistemische Zustände semantisch definit sein müssen, so in einem engen Zusammenhang dazu, dass ‚non-generating partitions' notwendig inkompatible, unscharf und somit komplementär sind. Dieser Überlegungen stehen auch in Zusammenhang mit der Auffassung, dass eine Definition von Makrozuständen über eine Partitionierung des Zustandsraums mit der Definition von Zuständen verbunden sein sollte, die aufgrund der Wahl der Partitionierung in der Lage sind, ihre eigene Zukunft vorauszusagen. Vgl. hierzu Shalizi / Moore (2003).

[43] Nur Eigenzustände der Operationen bilden im Sinne Cantors eine wohldefinierte Menge, weil nur für sie die Zugehörigkeit zu den Mengen der epistemischen Zustände eindeutig definiert ist: „Eine Mannigfaltigkeit (ein Inbegriff, eine Menge) von Elementen […] nenne ich wohldefiniert, wenn auf Grund ihrer Definition […] es als intern bestimmt angesehen werden muss, sowohl ob irgendein […] Objekt zu der gedachten Mannigfaltigkeit als Element gehört oder nicht, wie auch, ob zwei zur Menge gehörige Objekte, trotz formaler Unterschiede in der Art des Gegebenseins einander gleich sind oder nicht." Cantor (1882), S. 150.

DEFINITION (5): VOLLSTÄNDIGKEIT: Eine Menge von simultan semantisch definiten Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_n$ ist vollständig, wenn die Disjunktion aller Operationen immer zum Ergebnis w führt: $\forall\ |\psi\rangle$: $\bigvee_{n=1,\ldots,N} \widehat{K}_n\ |\psi\rangle = w$.

Mit diesen Definitionen können nun Partitionierungen definiert werden:

DEFINITION (6): PARTITIONIERUNG: Eine Menge Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_n$ bildet eine Partitionierung, wenn jeder dieser Erkenntnisoperationen nach Definition (3) semantisch definit ist, wenn alle $\widehat{K}_n$ paarweise nach Definition (4) simultan semantisch definit sind und wenn die Menge der Operationen $\widehat{K}_n$ nach Definition (5) vollständig ist.[44]

Vor dem Hintergrund dieser Definitionen lässt sich nun über die Negation von Definition (2) die Komplementarität von Erkenntnisoperationen definieren:[45]

DEFINITION (7): KOMPLEMENTARITÄT-I: Zwei Operationen $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ sind *irreduzibel* unscharf oder komplementär, wenn sie nach Definition (1) unscharf sind und nach Definition (6) keine Partitionierung $\mathbb{P}$ existiert, durch die sich $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ eindeutige definieren lassen.

Geht man davon aus, dass sich die Vollständigkeit nach Definition (5) immer realisieren lässt, dann gibt es ausgehend von Definition (6) einer Partitionierung zwei unterschiedliche, nicht-triviale Definitionen komplementärer Operationen:

DEFINITION (7): KOMPLEMENTARITÄT-II: Zwei Operationen $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ sind komplementär, wenn sie nach Definition (1) unscharf sind und es nicht möglich ist, durch eine Menge von alternativen Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_n$ nach Definition (3) semantisch definite epistemische Zustände $|n\rangle$ zu definieren, über die $|a\rangle$ und $|b\rangle$ eindeutig definiert werden können.

Der Nachweis, dass die in dieser Arbeit zugrunde liegenden Simulation verwendeten Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_\alpha$ und $\widehat{K}_\beta$ für $\alpha \neq \beta$ genuin komplementär sind, beruht auf Definition (7): Es wurde zum einen für drei Varianten gezeigt, dass der Versuch, informativere semantisch definite epistemische Zustände zu definieren, scheitert: In alle drei Fällen, war es nicht möglich, kleinere invariante Teilmengen von ontischen Zuständen auf der Basis der der Simulation zugrunde liegenden elektrostatischen Wechselwirkung zu definieren. In allen Fällen wurden ontische Zustände so durch die Operationen auf Folgezustände abgebildet, dass sie nicht mehr Element der Klasse waren, der sie ursprünglich zugewiesen wurden. Wie bereits diskutiert, kann dieser Zusammenhang aber lediglich als Heuristik angesehen werden, weil aus dem Scheitern von drei Versuchen nicht die grundsätzliche Unmöglichkeit folgt. Dieser prinzipielle Nachweis wurde dann über eine Analyse der durch die Operationen $\widehat{K}_\alpha$ und $\widehat{K}_\beta$ induzierten Abbildung geleistet, indem gezeigt wurde, dass die Abbildung der ontischen Zustände unter den Operationen des Typs $\widehat{K}_\alpha$ keine anderen invarianten Mengen – und somit auch keine kleineren Teilmengen – zu definieren gestattet, als die epistemischen Zustände der Operationen $\widehat{K}_\alpha$ und $\widehat{K}_\beta$: $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$. So wurde zum einen gezeigt, dass die Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$ nach Definition (3) einerseits semantisch definit sind, und anderseits, dass sie die einzigen und somit kleinsten semantisch definiten Mengen ontischer Zustände sind, die sich durch die Wechselwirkung der Simulation definieren lassen, so dass für nach Definition (1) relativ zueinander unscharfe Operationen $\widehat{K}_\alpha$

[44] Im quantenmechanischen Formalismus entspricht dieser Definition einer Partitionierung das Konzept der Orthonormalbasis von Eigenzuständen kommutierender Operatoren: D.h. Dimensionen quantenmechanischer Zustandsräume sind Partitionierungen.

[45] Dass inkompatible Messungen keine gemeinsame Verfeinerung haben, betont Wright (1990), S. 881.

und $\widehat{K}_\beta$ mit $\alpha \neq \beta$ keine informativeren semantisch definiten epistemischen Zustände existieren und $\widehat{K}_\alpha$ und $\widehat{K}_\beta$ daher nach Definition (7) komplementär sind.

Es lassen sich nun ausgehend von der Definition von Partitionierungen unterschiedliche, nicht-triviale Definitionen komplementärer Operationen angeben. Für den Fall, dass es möglich ist, alternative, informativere nach Definition (3) semantisch definite epistemische Zustände zu definieren, können Operationen immer noch komplementär sein, wenn diese epistemischen Zustände nach Definition (4) nicht simultan semantisch definit sind:

> DEFINITION (8): KOMPLEMENTARITÄT-III: Zwei Operationen $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ sind komplementär, wenn sie nach Definition (1) unscharf sind, eine Menge von alternativen Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_n$ mit nach Definition (3) semantisch definiten epistemischen Zuständen $|n\rangle$ existiert, über die $|a\rangle$ und $|b\rangle$ eindeutig definiert werden können, aber die Zustände $|n\rangle$ bzw. die Operationen $\widehat{K}_n$ nach Definition (4) nicht simultan semantisch definit sind.

In Definition (2) der Reduzibilität von Unschärfen wurde gefordert, dass eine Partitionierung $\mathbb{P}$ existiert, durch die sich $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ als eindeutige Funktionen deterministisch definieren lassen. Die bisherigen Überlegungen haben sich bis jetzt wesentlich mit den Bedingungen befasst, unter denen eine solche Partitionierung $\mathbb{P}$ durch Erkenntnisoperationen implementiert werden kann, was primär dadurch bedingt war, dass dieser Aspekt bereits hinreichend ist, um zu zeigen, dass es sich im Fall der simulierten Erkenntnisoperationen um komplementäre Operationen handelt. Abschließend soll nun diskutiert werden, welche Implikationen sich aus der Forderung ergeben, dass sich die Operationen $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ über eine Partitionierung definieren lassen.

Sei eine Partitionierung $\mathbb{P}$ durch eine Menge von Erkenntnisoperationen $\widehat{K}_n$ mit den epistemischen Zuständen $|n\rangle$ gegeben, die dann per definitionem semantisch definit und wechselseitig simultan semantisch definit sein müssen – also invariant unter allen Operationen $\widehat{K}_n$. Wenn sich die Operation $\widehat{K}_a$ als eindeutige, deterministische Funktion von $\widehat{K}_n$ definieren lassen soll, dann muss es eine Definition der Zugehörigkeit zum epistemischen Zustand $|a\rangle$ geben, die über eine disjunktive Kombination der Zugehörigkeit zu den Zuständen $|n\rangle$ definiert ist

$$P_\gamma \in |a\rangle \iff \bigvee_{n=1,\dots,N} F^{(n)}\big(P_\gamma \in |n\rangle\big),$$

wobei $F^{(n)}$ eine Funktion ist, die in jeweils spezifischer Weise $P_\gamma \in |n\rangle$ so auf die Werte w, f abbildet, dass die gewünschte Menge $|a\rangle$ definiert wird.

Dies bedeutet erstens, dass sich unter dieser Bedingung die Zugehörigkeit $P_\gamma \in |a\rangle$ nur dann ändern kann, wenn sich die Zugehörigkeit $P_\gamma \in |n\rangle$ für wenigstens einen der epistemischen Zustände $|n\rangle$ ändert. Da diese aber als Partitionierung semantisch definit und simultan semantisch definit sind – also invariant unter allen Operationen – kommt es per definitionem für keinen ontischen Zustand zu einer Veränderung der Zugehörigkeit zu den epistemischen Zuständen $P_\gamma \in |n\rangle$, woraus folgt, dass dies auch für die Zugehörigkeit $P_\gamma \in |a\rangle$ gelten muss, wenn sie eindeutig und deterministisch über die Partitionierung $\mathbb{P}$ definiert werden soll: Der epistemische Zustand $|a\rangle$ muss invariant unter der ihn definierenden Operation $\widehat{K}_a$ sein – er muss also ein Eigenzustand

$$w|a\rangle = \widehat{K}_a|a\rangle$$

sein, so dass $\widehat{K}_a$ semantisch definit sein muss. Damit eine Operation $\widehat{K}_a$ eindeutig und deterministisch über eine Partitionierung definiert werden kann, muss er selbst semantisch definit sein. Damit wird die Bedingung, dass Erkenntnisoperationen semantisch definit sein müssen, zur notwendigen Minimalbedingung dafür, überhaupt reduzibel unscharf sein zu können, indem diese Bedingung ausschließt, dass eine Erkenntnisoperation mit sich selbst unscharf ist.

> Definition (9): Komplementarität-IV: Nicht semantisch definite Operationen sind relativ zu sich selbst irreduzibel unscharf und somit komplementär und somit grundsätzlich relativ zu allen anderen Operationen unscharf und daher komplementär. Eine Operation muss notwendig semantisch definit sein, um nicht-komplementär sein zu können.

Da wie oben ausgeführt nur semantisch definite Operationen – also Operationen deren epistemische Zustände unter ihnen invariant bzw. Eigenzustände zu ihnen sind – eine extensional eindeutig definierte Semantik im Sinne einer ihnen eindeutig zugeordneten Menge ontischer Zuständ besitzen, lässt sich das Axiom der Quantenmechanik, ausschließlich die Eigenzustände von Operatoren als repräsentationale Zustände zu verwenden, dahin gehend deuten, ausschließlich Zustände mit einer extensional eindeutig definierten Semantik zu verwenden. Dieses Axiom lässt sich demnach als eine Strategie auffassen, trotz der Notwendigkeit über wechselwirkungsbasierte Erkenntnisoperationen, die im Akt der Repräsentation die ontischen Zustände verändern, die Umwelt repräsentieren zu müssen, epistemische Zustände mit einer eindeutig definierte Semantik zu verwenden. Der Preis, der für einen derart eindeutig definierten semantischen Gehalt zu zahlen ist, besteht dann aber darin, die ontischen Zustände über Erkenntnisoperation nicht beliebig fein differenzieren zu können: Um semantisch definite Operationen zu konstruieren, muss das Auflösungsvermögen der Operation so weit herabgesetzt werden, dass die durch die Operation induzierten Veränderungen nicht zu einer Veränderung der Klassifikation der Zustände führen: Das Auflösungsvermögen semantisch definiter Erkenntnisoperationen muss so gering – ihre kategorialen Bereiche so weit – sein, dass es die durch die Operationen selbst induziere Dynamik der ontischen Zustände nicht abbilden kann.

> AXIOM (9): REPRÄSENTATIONALE ZUSTÄNDE SIND EIGENZUSTÄNDE: Nur semantisch definite Operationen – also Operationen, deren epistemischen Zustände Eigenzustände sind – haben einen eindeutig extensional definierten semantischen Gehalt und können auch nicht komplementär sein. Trotz der Notwendigkeit von wechselwirkungsbasierten Erkenntnisoperationen über einen definierten semantischen Gehalt zu verfügen, impliziert, das Auflösungsmögen der Operationen soweit zu reduzieren, dass die durch sie selbst induzierte Dynamik nur zu Abbildungen innerhalb der über die Operationen definierten Klassen führt – dass also die induzierte Dynamik selbst nicht durch die Operation aufgelöst und somit ‚sichtbar' wird.[46]

Des Weiteren folgt aus der eindeutigen Definierbarkeit von $\widehat{K}_a$ durch die Partitionierung $\widehat{K}_n$ – also aus der Implikation, dass sich die Zugehörigkeit $P_\gamma \in |a\rangle$ nur dann ändern kann, wenn sich die Zugehörigkeit $P_\gamma \in |n\rangle$ für wenigstens einen der epistemischen Zustände $|n\rangle$ ändert –, dass die Menge der

[46] Da die Funktion eines Repräsentationssystem darin besteht, Informationen über die Umwelt zu tragen, und diese Informationen in einer systematischen Form der Kovarianz von Umweltzuständen und repräsentationalen Zuständen – in einer nicht verschwindenden Transinformation – begründet ist, können nicht semantisch definite Zustände in einer Extremform als Zustände aufgefasst werden, die jeden beliebigen ontischen Zustand repräsentieren und somit keine Information mehr über die Umwelt tragen. In diesem Sinne ließe sich dieses Axiom als Bedingung dafür auffassen, trotz der Rückwirkung von Erkenntnisoperationen auf die ontischen Zustände informative – oder vielleicht auch maximal informative – epistemische Zustände zu definieren. Dies ist aber erst einmal als unbestätigte Hypothese anzusehen, die durch weitere Arbeiten zu begründen wäre.

ontischen Zustände $|a\rangle$ invariant unter den Operationen $\widehat{K}_n$ sein muss, weil die Mengen $|n\rangle$ selbst invariant sind. Dieselbe Argumentation gilt anlog für die zweite Operation $\widehat{K}_b$: Damit die beiden Operationen $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ reduzibel unscharf sein können, müssen beide eindeutig durch die Partitionierung $\widehat{K}_n$ definierbar sein, so dass sowohl der epistemische Zustand $|a\rangle$ als auch $|b\rangle$ invariant unter den Operationen $\widehat{K}_n$ sein muss. Dies impliziert, dass der Zustand $|a\rangle$ invariant unter der Operation $\widehat{K}_b$ und der Zustand $|b\rangle$ invariant unter der Operation $\widehat{K}_a$ sein muss. Aus dieser Invarianz folgt nicht, dass im Zustand $|b\rangle$ die Operation $\widehat{K}_a$immer zum selben Ergebnis führen muss und vice versa – in diesem Fall wären die Operationen ja bereits disjunkt und nicht mehr unscharf –, sondern lediglich, dass unabhängig vom Ergebnis von $\widehat{K}_a$ bzw. $\widehat{K}_b$

$$\widehat{K}_b\widehat{K}_a|b\rangle = w$$

und entsprechend

$$\widehat{K}_a\widehat{K}_b|a\rangle = w$$

gilt – d.h. dass die Ergebnisse der Operationen nicht von der Reihenfolge ihrer Anwendung abhängen.

> Definition (10): Komplementarität-V: Zwei Operationen $\widehat{K}_a$ bzw. $\widehat{K}_b$ lassen sich nur dann simultan als eindeutige deterministische Funktion einer Partitionierung definieren, wenn ihre Ergebnisse nicht von der Reihenfolge ihrer Anwendung abhängen. Operationen, die nicht vertauschbar sind, sind damit irreduzibel unscharf und somit komplementär.

Mit Definition (10) folgt aus dem in Abbildung 5a dargestellten Effekt der Reihenfolge auf das Ergebnis unmittelbar, dass die Erkenntnisoperationen der Simulation $\widehat{K}_\alpha$ bzw. $\widehat{K}_\beta$ für $\alpha \neq \beta$ und $\alpha \neq \beta + 180°$ irreduzibel unscharf und somit komplementär sind.

Zwei Operatoren $\widehat{K}_\alpha$ bzw. $\widehat{K}_\beta$ sind nach Definition (9) und Definition (11) nur simultan eindeutig und deterministisch über eine Partitionierung $\mathbb{P}$ definierbar und somit potenziell reduzibel unscharf, wenn beide durch sie definierten epistemischen Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$ Eigenzustände beider Operatoren $\widehat{K}_\alpha$ bzw. $\widehat{K}_\beta$ sind. Sind die Eigenzustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$ zusätzlich disjunkt, sind die Operatoren $\widehat{K}_\alpha$ bzw. $\widehat{K}_\beta$relativ zueinander scharf und somit nicht komplementär. Sind sie hingegen nicht disjunkt, dann existiert eine Schnittmenge $|S\rangle = |a\rangle \cup |b\rangle \neq \emptyset$. Wird nun ein ontischer Zustand $P_\gamma \in |S\rangle$ durch eine der Operationen $\widehat{K}_\alpha$ oder $\widehat{K}_\beta$ nicht wieder auf $|S\rangle$ abgebildet, dann ist er nach der Operation nicht mehr Element wenigstens einer der beiden Mengen $|a\rangle$ oder $|b\rangle$, obwohl er vor der Operation Element beider Mengen $|a\rangle$ und $|b\rangle$ war, so dass in diesem Fall wenigstens einer der beiden epistemischen Zustände unter den Operationen nicht invariant und somit kein Eigenzustand wäre – beide epistemischen Zustände können nur dann nicht disjunkt und Eigenzustände sein, wenn die Schnittmenge selbst ein Eigenzustand ist. Sind demnach zwei Operationen $\widehat{K}_\alpha$ und $\widehat{K}_\beta$ simultan eindeutig und deterministisch über eine Partitionierung $\mathbb{P}$ definierbar – sind ihre epistemischen Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$ wechselseitig Eigenzustände – und sind die epistemischen Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$ nicht disjunkt, dann folgt, dass ihre Schnittmenge $|S\rangle = |a\rangle \cup |b\rangle \neq \emptyset$ selbst ein Eigenzustand beider Operationen ist. Eine analoge Argumentation gilt für die Restmengen $|a\rangle/|S\rangle$, $|b\rangle/|S\rangle$, die damit ebenfalls Eigenzustände der Operationen $\widehat{K}_\alpha$ und $\widehat{K}_\beta$ sind. Damit zwei Operationen $\widehat{K}_\alpha$ und $\widehat{K}_\beta$ sich über eine Partitionierung $\mathbb{P}$ eindeutig und deterministisch definierbar sind, müssen ihre Eigenzustände entweder bereits disjunkt sein oder es existieren feinere disjunkte Eigenzustände beider Operationen

– in beiden Fällen existiert aber einer Menge disjunkter wechselseitiger Eigenzustände: Es existiert eine Menge nach Definition (3) semantisch definiter und nach Definition (4) simultan bzw. wechselseitig semantisch definiter Eigenzustände, die damit Definition (6) einer Partitionierung erfüllt, wenn das Kriterium der Vollständigkeit erfüllt ist.[47]

> Definition (11): Komplementarität-VI: Zwei Operationen $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ lassen sich nur dann simultan eindeutig als deterministische Funktion einer Partitionierung definieren, wenn eine geteilte Menge von Eigenzuständen beider Operationen existiert – wenn die Operationen $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$ semantisch definit und simultan semantisch definit sind. Operationen $\widehat{K}_a$ und $\widehat{K}_b$, die keinen gemeinsamen Satz von Eigenzuständen besitzen, sind irreduzibel unscharf, weil sie sich nicht beide eindeutig als deterministische Funktion einer Partitionierung definieren lassen, und somit komplementär sind.

Damit folgt, dass komplementäre Operationen dadurch charakterisiert sind, dass sie nicht simultan semantisch definit sind und dass nicht simultan semantisch definite Erkenntnisoperationen irreduzibel unscharf und somit komplementär sind.

> Definition (12): Komplementarität-VII: Komplementäre Erkenntnisoperationen sind nicht simultan semantisch definite Erkenntnisoperationen.

Wenn mit Axiom (9) angenommen wird, dass ausschließlich erkenntnisoperational definierte, semantisch definite epistemische Zustände verwendet werden, kann von zwei komplementären Operationen oder Systemen von Operationen nur immer jeweils eine bzw. eines eine eindeutige Klassifikation von ontischen Zuständen definieren, nicht aber beide simultan. Komplementäre Erkenntnisoperationen sind Operationen, die nicht simultan eine eindeutige Zuordnung von ontischen Zuständen zu epistemischen Zuständen definieren können. Von hier aus lässt sich der Bogen zum ersten Teil der Arbeit zurückspannen, in dem gezeigt wurde, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten der simulierten Erkenntnisoperationen auf eine Art und Weise vom klassisch zu erwartenden Verlauf abweichen, die sich nicht im Rahmen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie rekonstruieren lässt. Vor dem Hintergrund, dass die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie von einer eindeutigen Aufteilung der Elemente – von Bällen in einer Urne – auf die Eigenschaften ausgeht, also davon, dass ein Element unabhängig vom Kontext entweder eine Eigenschaft besitzt oder nicht, wird deutlich, dass diese Theorie eben nicht auf komplementäre Eigenschaften anwendbar ist, weil die Zuordnung der Eigenschaften zu den Elementen nach Definition (12) eben immer nur für eine komplementäre Eigenschaft eindeutig ist, nicht aber simultan für mehrere komplementäre Eigenschaften: Die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie geht davon aus, dass alle Eigenschaften mit denen sie operiert, simultan semantisch definit sind, während komplementäre Eigenschaften eben nicht simultan semantisch definit sind. Die abweichenden bedingten Wahrscheinlichkeiten komplementärer Operationen sind Ausdruck der Tatsache, dass es keine über alle Operationen invariante, eindeutig definierte Zuordnung der ontischen Zustände zu epistemischen Zuständen gibt: Die in Abbildung 4a sichtbaren Abweichungen gegenüber dem klassischen Verlauf reflektieren diejenigen ontischen Zustände, die aufgrund der Wechselwirkung der komplementären Operationen nicht mehr so klassifiziert werden, wie sie in einer ersten Messung klassifiziert wurden. Für komplementäre Erkenntnisoperationen gibt es demnach zwei Effekte, die zu den bedingten Wahrscheinlichkeiten beitragen: (1) das Verhältnis ihrer kategorialen Bereiche oder Grenzen – was dem klassischen Fall entspricht – und (2) die Verschiebung

[47] Es wird im Folgenden angenommen, dass die Vollständigkeit unproblematisch ist und somit als grundsätzlich erfüllbar angesehen werden kann.

von ontischen Zuständen über diese Grenzen hinweg durch die Rückwirkung der Operationen auf die ontischen Zustände – dies ist das komplementäre Surplus gegenüber dem klassischen Fall.

Literatur

AERTS, Diederick (1985), *A possible Explanation for the Probabilities of Quantum Mechanics and an Example of a Macroscopical System that Violates Bell Inequalities*, in: Mittelstaedt / Stachow, (1985), S. 235-249.

AERTS, Dirk (1986), *A possible Explanation for the Probabilities of Quantum Mechanics*, in: Journal of Mathematical Physics, Vol. 27, Bd. 1, S. 202-210.

AERTS, Diederick (1987), *The Origin of the Non-Classical Character of the Quantum Probability Model*, in: Blaquiere / Diner / Lochak (1987), S. 77-100.

AERTS, D. / DURT, T. / GRIB, A.A. / BOGAERT, Van B. / ZAPATRIN, R.R. (1993), *Quantum Structures in Macroscopic Reality*, in: International Journal of Theoretical Physics, Vol. 32, Bd. 3, S. 489-498.

ATMANSPACHER, Harald / PRIMAS, Hans (2003), *Epistemic and Ontic Quantum Realities*, in: Castell / Ischebeck (2003), S. 301-321. Verfügbar unter (Juni 2009): http://www.igpp.de/english/tda/pdf/cfvw.pdf.

ATMANSPACHER, Harald / RÖMER, Hartmann / WALACH, Harald (2004), *Weak Quantum Theory: Complementarity and Entanglement in Physics and Beyond*, in: Foundations of Physics, Vol. 32 (2004), S. 379-406. Verfügbar unter (Mai 2009): http://arxiv.org/abs/quant-ph/0104109.

ATMANSPACHER, Harald (2007), *Contextual Emergence from Physics to Cognitive Neuroscience*, in: Journal of Consciousness Studies, Vol. 14, Bd. 1-2, S. 18-36. Verfügbar unter (März 2011): http://www.igpp.de/english/tda/pdf/normaljcs.pdf.

ATMANSPACHER, Harald / BISHOP, Robert C. (2007), *Stability Conditions in Contextual Emergence*, in: Chaos and Complexity Letters, Vol. 2, Bd. 2/3, S. 139-150.

BAUMANN, Kurt / SEXL, Roman U. (Hrsg.)(1984), *Die Deutung der Quantentheorie*, Vieweg & Sohn: Braunschweig / Wiesbaden.

BOHR, Niels (1927), *Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik*, in: Bohr (1931), S. 34-59.

BOHR, Niels (1931), *Atomtheorie und Naturbeschreibung*, Berlin: Springer.

BEIM GRABEN, Peter (2004), *Incompatibel Implementations of Physical Symbol Systems*, in: Mind and Matter, Vol. 2 (2004), Bd. 2, S. 29-51.

BEIM GRABEN, Peter / ATMANSPACHER, Harald (2006), *Complementarity in Classical Dynamical Systems*, in: Foundations of Physics, Vol. 36 (2006), S. 291-306. Verfügbar unter (Mai 2009): http://www.personal.rdg.ac.uk/~lls06prb/pbgpub/JournalPapers/GrabenAtmanspacher.FoundPhys36_2.pdf.

BELL, John S. (1964), *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*, in: Bell (1987), S. 14-21. Original in: Physics, Vol.1 (1964), S. 195-200.

CALUDE, Christian / CALUDE, Elena / SVOZIL, Karl / YU, Sheng (1997), *Physical Versus Computational Complementarity I*, in: International Journal of Theoretical Physics, Vol. 36, Bd.7, S. 1495-1523.

CASTELL, Lutz / ISCHEBECK, Ottfied (Hrsg.)(2003), *Time, Quantum and Information*, Springer Verlag: Berlin.

CANTOR, Georg (1882), *Über unendliche Punktmannigfaltigkeiten. Nr.3*, in: Cantor (1932), S.149-157. Original in: Mathematische Analen, Vol. 20, S. 113-121.

CANTOR, Georg (1932), *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer Verlag: Berlin, nachgedruckt: Georg Olms Verlag: Hildesheim / New York.

EINSTEIN, Albert / PODOLSKY, Boris / ROSEN, Nathan (1935), *Kann man die quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit als vollständig betrachten*?, in: Baumann / Sexl (1984), S. 80-86. Original: Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? in: Physical Review, Vol. 47 (1935), S. 777-780.

EUBANK, Stephen / FARMER, J. Doyne (1997), *Introduction to Dynamical Systems*, in: Lam (1997), S. 55-105.

HEISENBERG, Werner (1927), *Über den anschaulichen Inhalt der quantenmechanischen Kinematik und Mechanik*, in: Baumann / Sexl (1984), S. 53-79. Original: Zeitschrift für Physik, Vol. 37 (1927), S. 863-867.

HELD, Carsten (1996), *Die Bohr-Einstein Debatte – Quantenmechanik und physikalische Wirklichkeit*, Schöningh Verlag: Paderborn, München, Wien.

HEYLIGHEN, Francis (1990), *Classical and Non-Classical Representations in Physics II: Quantum Mechanics*, in: Cybernetics and Systems, Vol. 21, S. 477-502, verfügbar (24.01.2012): http://pespmc1.vub.ac.be/papers/QuantumMech.pdf. Die Zitation folgt der Paginierung der online verfügbaren Version.

HOPFIELD, J.J. (1982), *Neuronal Networks and Physical systems with emergent collective computational abilities*, in: Proceedings of the National Academy of Science USA, Vol. 79, S. 2554-2558.

IHMIG, Norbert (1997), *Cassirers Invariantentheorie der Erfahrung und seine Rezeption des ‚Erlanger Programms'*, Meiner Verlag: Hamburg.

KRALEMANN, Björn (2000), *Die Begriffstheorie Ernst Cassirers – Zur Konstitution bedeutungsvoller Realität*, Kiel.

KRALEMANN, Björn (2006), *Umwelt, Kultur, Semantik- Realität – Eine Theorie umwelt- und kulturabhängiger semantischer Strukturen der Realität auf der Basis der Modellierung kognitiver Prozesse durch neuronale Netze,* Leipzig: Leipziger Universitätsverlag.

KRALEMANN, Björn (2010), *Komplementarität in wechselwirkungsbasierten Repräsentationssystemen*, in: Zeitschrift für interdisziplinäre Systembildung: Vol.3 , Bd. 2 (2010). Verfügbar unter: www.z-isb.de/kfjg3.html.

LAM, Lui (Hrsg.)(1997*), Introduktion to Nonlinear Physics*, Springer Verlag: New York / Berlin / Heidelberg.

NOLTING, Wolfgang (1994), *Grundkurs: Theoretische Physik 5 – Quantenmechanik Teil 1*: *Grundlagen*, Verlag Zimmermann-Neufang: Ulmen[2].

PITOWSKY, Itamar (1989), *Quantum Probability – Quantum Logic*, Berlin / Heidelberg: Springer Verlag.

PLASCHKO, Peter / BROD, Klaus (1995), *Nichtlineare Dynamik, Bifurkation und Chaotische Systeme*, Vieweg Verlag: Braunschweig / Wiesbaden.

PRIMAS, Hans (1984), *Elementare Quantenchemie*, Stuttgart: B.H. Teubner.

ROBINSON, Clark (1999), *Dynamical Systems – Stability, Symbolic Dynamic, and Chaos*, CRC Press: Boca Raton / London / New York / Washington D.C.

SCHEIBE, Erhard (1964), *Die kontingenten Aussagen in der Physik*, Athenäum Verlag: Frankfurt a.M.

SCHEIBE, Erhard (1973), *The Logical Analysis of Quantum Mechanics*, Pergamon Press: Oxford.

SCHWABL, Franz (2005), *Quantenmechanik*, Springer Verlag: Berlin[6].

SELLERI, Franco (1983), *Die Debatte um die Quantenmechanik*, Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg.

SHALIZI, Cosma Rohilla / MOORE, Christopher (2003*), What is a Macrostate? Subjective Observations and Objective Dynamics*, Verfügbar unter (08.04.2010): http://philsci-archive-pitt.edu/archive/00001119/00/whats-macro.pdf.

SPENCER-BROWN, George (1997), *Gesetze der Form*, Joh. Bohmeier Verlag: Lübeck.

SPIEß, Reinhard (2008), *Bildung von Singularitäten: Zur Entmystifizierung des Systemischen - Entwurf einer Theorie komplementärer Systemizität*, Books on Demand.

WIGGINS, Stephen (1988), *Global Bifurcations and Chaos – Analytical Methods*, Springer Verlag: New York / Berlin / Heidelberg / Lond0n / Paris / Tokyo.

WRIGHT, Ron (1990), *Generalized Urn Models*, in: Foundations of Physics, Vol. 20, Bd. 7, S. 881 - 903.